LÖSUNGEN ZU DEN T4-ÜBUNGEN
MITSCHRIFT ZUR ÜBUNGSGRUPPE VON PROF. GROSSE

MARKUS DRAPALIK
VERSION VOM 14.03.2006

1. Bsp 1

1.1. **Angabe.** Gegeben sei eine Observable im endlich-dimensionalen Hilbertraum. Mit Tr sei der Spurzustand bezeichnet. Zeigen Sie die Linearität, die Zyklizität und die Invarianz unter unitären Transformationen für diesen Zustand. Betrachten sie auch die Normierung!

1.2. **Lösung.**

$$\operatorname{Tr} A = \sum_n \langle \varphi_n | A \varphi_n \rangle$$

1.2.1. *Linearität.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_n \langle \varphi_n | \left(\lambda A + \mu B\right) \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \left(\langle \varphi_n | \lambda A \varphi_n \rangle + \langle \varphi_n | \mu B \varphi_n \rangle \right) \\
&= \sum_n \lambda \langle \varphi_n | A \varphi_n \rangle + \sum_n \mu \langle \varphi_n | B \varphi_n \rangle \\
&= \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B
\end{aligned}$$

1.2.2. *Positivität.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(A^* A) &= \sum_n \langle \varphi_n | A^* A \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \langle A \varphi_n | A \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n |\, |A \varphi_n \rangle \,|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

1.2.3. *Zyklizität.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} AB &= \sum_n \langle \varphi_n | AB \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \langle B^\dagger A^\dagger \varphi_n | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \langle BA \varphi_n | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \underbrace{\langle \varphi_n | BA \varphi_n \rangle}_{\text{reell!}} \\
&= \operatorname{Tr} BA
\end{aligned}$$

1.2.4. *unitäre Transformation.*

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\left(U^\dagger A\right) U &= \operatorname{Tr} \underbrace{U U^\dagger}_{1} A \\ &= \operatorname{Tr} A \end{aligned}$$

1.2.5. *Normierung.*

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \mathbf{1} &= \sum_n \langle \varphi_n | 1 \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n 1 \\ &= N \end{aligned}$$

Normierung daher mit $\frac{1}{N}$:

$$w(\mathbf{1}) = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_n \langle \varphi_n | 1 \varphi_n \rangle}_{N} = 1$$

2. Bsp 2

2.1. Angabe. Gegeben sei der Spurzustand über den zwei mal zwei Matrizen (Spin $\frac{1}{2}$ System). Berechnen Sie die Erwartungswerte der Spinkomponenten und deren Schwankungsquadrate.

Erläuterungen

Was ist der Erwartungswert von S_i im Zustand ϱ?

$$\left\langle S_i \right\rangle_{\varrho} = \mathrm{Tr}\, \varrho S_i$$

weiters:

$$\varrho^\dagger = \varrho \geq 0$$

$$\mathrm{Tr}\, \varrho = 1$$

$$A \mapsto w\left(A\right)|_{\in \mathbb{C}}$$

$$\alpha \left\langle \psi_1 | A \psi_1 \right\rangle + \left(1-\alpha\right) \left\langle \psi_2 | A\psi_2 \right\rangle \begin{cases} A \mapsto \left\langle \psi_1 | A\psi_1 \right\rangle \\ A \mapsto \left\langle \psi_2 | A \psi_2 \right\rangle \end{cases}$$

$$\alpha P_1 + \left(1-\alpha\right) P_2 = \begin{pmatrix} 1+n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + n_2 & 1-n_3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\sum n_i^2 = 1 \Rightarrow \text{reiner Zustand}$$

$$\sum n_i^2 < 1 \Rightarrow \text{gemischter Zustand (Bloch-Sphäre}$$

2.2. Lösung.

$$\text{Basis: } A_2 = \left\{1, \vec{\sigma}\right\}, \quad A_2 = \mathrm{Mat}\left(2, \mathbb{C}\right)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ilk}\sigma_k$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \sigma_1 &= \left\langle \uparrow \left| \sigma_1 \right| \uparrow \right\rangle + \left\langle \downarrow \left| \sigma_1 \right| \downarrow \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

analog

$$\mathrm{Tr}\, \sigma_2 = \mathrm{Tr}\, \sigma_3 = 0$$

$$\left(\Delta \sigma_i\right)^2 = \left\langle \sigma_i^2 \right\rangle - \left\langle \sigma_i \right\rangle^2$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\sigma_i^2 &= \langle\uparrow|1|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|1|\downarrow\rangle \\ &= 2\end{aligned}$$

Schwankungsquadrat ist also 2
für $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$:

$$\begin{aligned}(\Delta\sigma_i)^2 &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(S_i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{4}2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}$$

2.3. **andere Lösung.**

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)\right\rangle\left\langle\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc}1&1\\1&1\end{array}\right) \\ &= \varrho\end{aligned}$$

$$\langle\sigma_i\rangle_\varrho = \operatorname{Tr}(\varrho\sigma_i)$$

2.4. **in der VO.**

$$\begin{aligned}\langle S_i\rangle &= \operatorname{Tr}\varrho S_i \\ &= \operatorname{Tr}\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}\mathbf{1}\sigma_i\end{aligned}$$

$$\operatorname{Tr}\sigma_i = 0$$

$$\langle S_i\rangle = 0$$

$$(\Delta S_i)^2 = \left\langle S_i^2\right\rangle - \langle S_i\rangle^2$$

$$(\Delta S_i)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

3. Bsp 3

3.1. Angabe. Ein Zustand sei durch den zweidimensionalen Projektor auf den Unterraum, aufgespannt von der Wellenfunktion $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$, gegeben. Berechnen Sie wie unter 2. Erwartungswerte und Schwankungsquadrate der Komponenten des Spinoperators.

3.2. Lösung.

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma_1 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle \sigma_2 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\langle \sigma_3 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\left\langle \sigma_i^2 \right\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}
$$

für $\sigma_i \to S_i$ Ergebnisse mit $\frac{\hbar}{2}$ multiplizieren (Schwankungsquadrat mit $\frac{\hbar^2}{4}$)

3.3. in der VO.

$$\varrho = |\psi\rangle \langle\psi|$$

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_1 \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_2 \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} i & -i \\ i & -i \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_3 \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{4} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle S_i^2 \right\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{8}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta S_1)^2 &= \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \\
(\Delta S_2)^2 &= \frac{\hbar^2}{4} - 0 = \frac{\hbar^2}{4} \\
(\Delta S_3)^2 &= \frac{\hbar^2}{4} - 0 = \frac{\hbar^2}{4}
\end{aligned}
$$