Kapitel 7

Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse

Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsdichte, Markov-Prozess („Zukunft hängt von der Vergangenheit nur über die Gegenwart ab.“)

7.1 Einführung (Brownsche Bewegung)

7.1.1 Eindimensionale Irrfahrt

Teilchen bewegt sich auf x-Achse: wir werfen pro Zeiteinheit τ eine Münze:

- bei Zahl: Sprung der Länge l nach rechts
- bei Wappen: Sprung der Länge l nach links

Gesucht: (bedingte) Wahrscheinlichkeit $P(m, N \mid 0, 0)$, dass Teilchen nach N Sprüngen (bzw. zur Zeit $t = N\tau$) an der Stelle $x = ml$, wenn es anfänglich ($t = 0$) bei $x = 0$ war.

7.1.1.1 Kombinatorische Herleitung

Wir bezeichnen mit $P(m, N \mid 0, 0)$ die Wahrscheinlichkeit, von $x = 0$ bei $t = 0$ aus n_R Sprünge nach rechts und $n_L = N - n_R$ Sprünge nach links zu machen.
Die Anzahl der Möglichkeiten, n_R Sprünge nach rechts und n_L Sprünge nach links zu machen, ist

$$P(m, N \mid 0, 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_R} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_L} \cdot \frac{N!}{n_R! n_L!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N} \begin{pmatrix} N \\ n_R \end{pmatrix}$$

mit

$$N = n_R + n_L \qquad m = n_R - n_L$$

$$n_R = \frac{N + m}{2} \qquad m = 2n_R - N$$

$$P(m,N \mid 0,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \begin{pmatrix} N \\ \frac{N+m}{2} \end{pmatrix}, \; m = -N, -N+1, \ldots, N$$

Bemerkung. Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ist erfüllt (irgendwo ist das Teilchen nach N Sprüngen sicher):

$$\sum_{m=-N}^{N} P(m,N \mid 0,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = 1$$

da $\sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = 2^N$.

Es gilt weiters die *Chapman-Kolmogorow-Gleichung*:

$$P(m,N+1 \mid 0,0) = \frac{1}{2}\left[P(m+1,N \mid 0,0) + P(m-1,N \mid 0,0)\right] \tag{7.1}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} P(m,N+1 \mid 0,0) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \begin{pmatrix} N+1 \\ \frac{(N+1)+m}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^N \begin{pmatrix} N \\ \frac{N+m+1}{2} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^N \begin{pmatrix} N \\ \frac{N+m-1}{2} \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[P(m+1,N \mid 0,0) + P(m-1,N \mid 0,0)\right] \end{aligned}$$

□

7.1.1.2 Einsteins Herleitung

Wir betrachten $P(m,N+1 \mid 0,0)$ als die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, nach $N+1$ Sprüngen zu x zu gelangen. Das ist äquivalent zum Summe über die Produkte aus

- der (bedingten) Wahrscheinlichkeit, nach N Sprüngen zu einem Nachbarn von x zu gelangen, $P(m \pm 1, N \mid 0,0)$ und
- der (bedingten) Wahrscheinlichkeit, von einem Nachbarn von x nach x zu gelangen, $\frac{1}{2}$:

$$P(m,N+1 \mid 0,0) = \frac{1}{2}\left[P(m+1,N \mid 0,0) + P(m-1,N \mid 0,0)\right]$$

7.1.2 Eindimensionale Brown'sche Bewegung

7.1.2.1 Historische Entwicklung

Experiment:

1785 Jean Ingenhousz: Kohlestaub auf Alkohol lässt höchst unregelmäßige Bewegung zu erkennen.

1827 Robert Brown: Unregelmäßige Pollenbewegungen in Flüssigkeiten

Theorie:

1905 Albert Einstein

1906 Sinduckowski

1908 P. Langevin

7.1.2.2 Theorie

Wir betrachten nun den Kontinuumslimes $\tau \to 0$, $l \to 0$ heuristisch, wo

$$D := \frac{l^2}{2\tau} \ldots \text{Diffusionskonstante}$$

festgehalten wird.

Bemerkung. In diesem Grenzfall gibt es keine Geschwindigkeit des Teilchens, da $\frac{l}{\tau} \to \infty$

Es sind

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{l^2}{2D} \to 0 \Rightarrow l \to 0 \\ m &= \frac{x}{l} \end{aligned}$$

in $P(m, N|0,0)$; N...Schrittzahl

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte)**.**

$$p(x,t|0,0)\Delta x := \sum_{m'} P(m', N|0,0) \simeq \frac{\Delta x}{l} P(m,N|0,0)$$

wo $x = ml$, $t = N\tau$, $\Delta x \gg l$, aber dennoch so klein, dass P innerhalb von Δx konstant ist.

$$\begin{aligned} ml - \frac{\Delta x}{2} &\leq m'l \leq ml + \frac{\Delta x}{2} \\ p(x,t|0,0) &\simeq \frac{1}{l} P(m,N|0,0) \end{aligned}$$

Wir betrachten also $N = \frac{t}{\tau} = \frac{t2D}{l^2}$ und

$$p(x,t|0,0) = \lim_{l\to 0} \frac{1}{l} P\left(\frac{x}{l}, \frac{t2D}{l^2}|0,0\right)$$

mit der Stirling-Formel $k! \simeq \sqrt{2\pi k}\frac{k^k}{\mathrm{e}^k}$

$$p(x,t|0,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4DT}}$$

ist Lösung der Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x,t|0,0) &= D\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t|0,0) \\ p(x,0|0,0) &= \delta(x) \end{aligned}$$

Die Diffusionsgleichung (identisch mit der Wärmeleitungsgleichung, Abschnitt **??**) entsteht aus

$$\frac{p(x,t+\tau|0,0) - p(x,t|0,0)}{\tau}$$

unter Verwendung der Chapman-Kolmogorow-Gleichung (7.1)

$$\begin{aligned}
p(x,t+\tau|0,0) &= \frac{1}{2}\left[p(x+l,t|0,0)+p(x-l,t|0,0)\right] \\
\frac{p(x,t+\tau|0,0)-p(x,t|0,0)}{\tau} &= \frac{l^2}{2\tau}\frac{p(x+l,t|0,0)-2p(x,t|0,0)+p(x-l,t|0,0)}{l^2} \\
\frac{\partial p}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Definition ((Bedingter) Erwartungswert des Ortes)**.**

$$\begin{aligned}
\langle x_t \rangle &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, x p(x,t|0,0) = 0 \\
\left\langle x_t^2 \right\rangle &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2 p(x,t|0,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\sqrt{4\pi D t}\frac{1}{2}4Dt = 2Dt
\end{aligned}$$

Da $p(x,t|0,0)$ gerade in x ist und x ungerade, verschwindet das Integral und damit $\left\langle x_t^2 \right\rangle$. Der Mittelwert des Quadrats des Abstandes des Teilchens vom Startpunkt verschwindet nicht; er nimmt *linear* in der Zeit zu! („*Diffusion*“)

7.1.3 Langevins Beschreibung der Brown'schen Bewegung

Langevin: Auf das Brown'sche Teilchen wirkt eine konventionelle Reibungskraft proportional zu seiner Geschwindigkeit und eine „fluktuierende“ Kraft $\eta(t)$, die die phänomenologische Beschreibung der zahlreichen Zusammenstöße des Teilchens mit den Flüssigkeitsmolekülen darstellt. Die Bewegungsgleichung (*Langevin-Gleichung*) lautet also

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -a\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \eta(t) \tag{7.2}$$

wo $a = 12\pi j r$ mit der Zähigkeit j und dem Teilchenradius r. (Mathematisch exaktere Formulierung folgt später). Multiplikation mit x und Anwendung der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2x\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\cdot x &= -a\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot x + \eta(t)\cdot x \\
\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2 x^2}{\mathrm{d}t^2} - m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= -\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \eta x
\end{aligned}$$

Wir bilden nun den Mittelwert $\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2\langle\langle x^2\rangle\rangle}{\mathrm{d}t^2}$. Dazu verwenden wir aus der statistischen Mechanik für die mittlere kinetische Energie $\left\langle\left\langle \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\rangle\right\rangle = \frac{1}{2}kT$ (mit der (abosluten) Temperatur T und der Boltzmann-Konstante k); des weiteren, „wegen der Unregelmäßigkeit von η“: $\langle\langle \eta x\rangle\rangle = 0$, und, für ein Brown'sches

Teilchen, $\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}\langle\langle x^2\rangle\rangle}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{a}{m}t} \simeq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2\left\langle\left\langle x^2\right\rangle\right\rangle}{\mathrm{d}t^2} - kT &= -\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}\left\langle\left\langle x^2\right\rangle\right\rangle}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}\left\langle\left\langle x^2\right\rangle\right\rangle}{\mathrm{d}t} &= \frac{2kT}{m} + \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{a}{m}t} = \frac{2kT}{m} \\
\left\langle\left\langle x^2\right\rangle\right\rangle &\simeq 2\frac{kT}{m}t = 2Dt
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die mathematisch wohldefinierte Formulierung für die Ableitung der Langevin-Gleichung erfolgte erst 1951 (also ca. 40 Jahre später) in Form des stochastischen Differentialkalküls von K. Itō; mehr dazu später.

7.2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiment heißen *Elementarereignisse* ω, die Menge aller Elementarereignisse *Stichprobenmenge* Ω

Beispiel. Einmal würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Beobachtbares oder *interessantes* Ereginis A: ist eine Untermenge von Ω, $A \subset \Omega$

Beispiel. Gewürfelte Augenzahl ist gerade: $A = \{2, 4, 6\}$

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller beobachtbaren oder interessanten Ereignisse

Definition (Wahrscheinlichkeit)**.** Sei Ω die Stichprobenmenge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra

$$P : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$$

heißt *Wahrscheinlichkeit*, wenn

1. $0 \le P(A) \le 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ falls $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, $\forall A_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*

Definition (Zufallsvariable)**.** Sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben; die Zufallsvariable

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \omega \to X(\omega)$$

ist eine *messbare* Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}$.

Beispiel. Nummer des Rings der Zielscheibe, in dem der Pfeil steckt.

Definition (Mehrdimensionale Zufallsvariable)**.** Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierte Zufallsvariable

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n : \omega \to (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots X_n(\omega))$$

Beispiel. $\Omega = \{\text{Bevölkerung einer Stadt}\}$

$X_1 \dots$ Größe $\qquad$ $X_2 \dots$ Gewicht $\qquad$ $X_3 \dots$ Alter

Definition (Stetige Zufallsvariable)**.** X heißt *stetige Zufallsvariable*, wenn es eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ gibt, sodass

$$P\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < t\}\right) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\mathrm{d}x$$

Bemerkung.

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < t\}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$$

(irgendeinen Wert hat X)

Bemerkung.

$$P\left(X \in [a, b]\right) = \int_{a}^{b} p(x)\mathrm{d}x$$

da, gemäß den Axiomen von P,

$$\begin{aligned} P(X < a) + P(a \leq x \leq b) &= P(x < b) \\ P(a \leq x \leq b) &= P(x < b) - P(X < a) \end{aligned}$$

Mehrdimensionale, stetige Zufallsvariable

$$P\left(\{\omega \in \Omega | (X_1(\omega), X_n(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B\}\right) = P(X \in B) = \int_B p\left(x_1, x_2, \dots x_n\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Definition (Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable X)**.**

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$$

beziehungsweise, falls $Y = g(X)$,

$$\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\mathrm{d}x$$

7.3 Stochastische Prozesse

Definition (Stochastischer Prozess)**.** Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Wenn für jedes $t \in I$ eine Zufallsvariable $X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ existiert, dann heißt $\{X_t\}_{t\in I}$ *stochastischer Prozess.*

Beispiel. Mein Kapital beim Pokerspiel als Funktion der Zeit.

Wir betrachten solche stochastische Prozesse, die durch Vorgabe *aller* $p_i\left(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots\right)$ definiert sind. Dann ist p_i die Dichte zur Wahrscheinlichkeit, dass x_1 zu t_1, x_2 zu t_2,... angenommen wird, wobei folgende Wigenschaften der p_i gefordert werden:

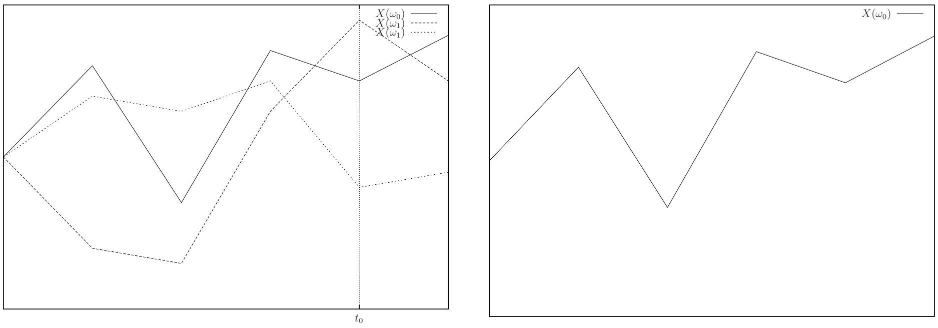
1. $p_i \geq 0$
2. p_i bleiben unverändert, wenn $(x_k, t_k) \leftrightarrow (x_j, t_j)$ ausgetauscht werden

3. $\int p(y_1, t_1; \ldots; y_{n-1}, t_{n-1}; y_n, t_n)\, \mathrm{d}y_n = p(y_1, t_1; \ldots; y_{n-1}, t_{n-1})$ (Verträglichkeitsbedingung)

4. $\int p(y, t)\mathrm{d}y = 1$

Satz (Fundamentalsatz von Kolmogoroff (o. Bew.))**.** *Zu jeder Familie von p_i mit obigen Eigenschaften exisitert ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und ein entsprechender stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\in I}$.*

Bemerkung. Für festes t_0 ist $X_{t_0}(\omega)$ eine Abbildung von $\Omega \to \mathbb{R}$: $\omega \to X_{t_0}(\omega)$, also eine Zufallsvariable. Für festes ω_0 ist $X_t(\omega_0)$ eine Abb. $I \to \mathbb{R}$, $t \to X_t(\omega_0)$, also ein stochastischer Prozess, genannt *Pfad* oder *Realisierung* des stoch. Prozesses.



(a) Zufallsvariable (b) Stochastischer Prozess

Abbildung 7.1: Zufallsvariable und stochastischer Prozess

Definition (bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte)**.**

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots \mid y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \ldots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \ldots)}{p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \ldots)}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte, dass x_1 zu t_1, x_2 zu t_2, … angenommen wird, wenn y_1 zu τ_1, y_2 zu τ_2, … angenommen wird.

Definition (Markov-Prozess)**.** X_t heißt *Markov-Prozess*, wenn für $\tau_1 < \ldots < \tau_m < t_1 < \ldots < t_n$ gilt:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n \mid y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \ldots; y_m, \tau_m) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n \mid y_m, \tau_m)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte eines Markov-Prozesses ist ausschließlich durch aktuellste Bedingung bestimmt: "Zukunft hängt von der Vergangenheit nur über die Gegenwart ab."

Beispiel (Kapital beim Pokern)**.** Nur zu dem Kapital, das ich gerade habe, kann ich etwas dazugewinnen, bzw. etwas davon verlieren.

Satz. *Ein Markov-Prozess ist durch $p(x, t)$ und $p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)$ vollständig bestimmt (o. Bew.)*

Beispiel. Sei $t_1 < t_2 < t_3$

$$\begin{aligned} p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= p(y_3, t_3 \mid y_1, t_1; y_2, t_2) \cdot p(y_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= p(y_3, t_3 \mid y_2, t_2) p(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) p(y_1, t_1) \end{aligned}$$

Können also auf Zwei-Punkt- und Ein-Punkt-Bedingung zurückführen.

Chapman-Kolmogorow-Gleichung $p(x, t)$ und $p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)$ sind nicht beliebig wählbar, sondern erfüllen:

1. die Verträglichkeitsbedingung $p(y_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, t_1; y_3, t_3)\mathrm{d}y_1$ bzw.

$$p(y_3, t_3) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(y_3, t_3 \mid y_1, t_1)p(y_1, t_1)\mathrm{d}y_1$$

2. Für Markovprozesse und mit $t_1 < t_2 < t_3$ gilt

$$\begin{aligned} p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= p(y_3, t_3 \mid y_2, t_2)p(y_2, t_2 \mid y_1, t_1)p(y_1, t_1) \\ \frac{p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3)}{p(y_1, t_1)} &= p(y_3, t_3 \mid y_2, t_2)p(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) \end{aligned}$$

und, mit Integration über y_2,

$$p(y_3, t_3 \mid y_1, t_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_2 p(y_3, t_3 \mid y_2, t_2)p(y_2, t_2 \mid y_1, t_1)$$

Das ist die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1).

Differentielle Chapman-Kolmogorow-Gleichung Wir schreiben im Folgenden die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1) als DGL um. Zunächst seien

$$A(y, t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|<\epsilon} \mathrm{d}x\, (x - y)p(x, t + \Delta t \mid y, t) \tag{7.3}$$

$$B(y, t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|<\epsilon} \mathrm{d}x\, (x - y)^2 p(x, t + \Delta t \mid y, t) - \mathcal{O}(\epsilon) \tag{7.4}$$

$$0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} p(x, t + \Delta t \mid y, t) \qquad \text{für } |x - y| > \epsilon \tag{7.5}$$

Sei $t > t'$ und $f(x)$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion; dann ist

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\partial}{\partial t} p\,(x, t \mid y, t') &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int \mathrm{d}x\, f(x)p\,(x, t + \Delta t \mid y, t') - \int \mathrm{d}z\, f(z)p\,(z, t \mid y, t') \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \int \mathrm{d}x\, f(x) \int \mathrm{d}z\, p\,(x, t + \Delta t \mid z, t)\, p(z, t|y, t') \\ &\quad - \int \mathrm{d}z\, f(z) \int \mathrm{d}x\, p\,(x, t + \Delta t \mid z, t)\, p(z, t|y, t') \} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z\, [f(x) - f(z)]\, p\,(x, t + \Delta t \mid z, t)\, p\,(z, t \mid y, t') \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1) sowohl im ersten wie auch im zweiten Term verwendet, und im zweiten Term zusätzlich, dass $\int \mathrm{d}x\, p\,(x, t + \Delta t \mid z, t) = 1$. Nun entwickeln wir $f(x) - f(z)$ in eine Taylor-Reihe in z,

$$f(x) - f(z) = (x - z)\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{1}{2}(x - z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z) + \ldots$$

und damit

$$\int \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\partial}{\partial t}p\left(x,t\mid y,t'\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\epsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\left[(x-z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)+\frac{1}{2}(x-z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)+\ldots\right]\cdot$$
$$p\left(x,t+\Delta t\mid z,t\right)p\left(z,t\mid y,t'\right)+\lim\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|>\epsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\ldots$$
$$=\int \mathrm{d}z\left[A(z,t)\frac{\partial f}{\partial z}(z)+\frac{1}{2}B(z,t)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)\right]p\left(z,t\mid y,t'\right)$$

unter Verwendung von (7.3, 7.4, 7.5). Weiters erhalten wir mittels partieller Integration

$$\int \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\partial}{\partial t}p\left(x,t\mid y,t'\right)=\int \mathrm{d}z\, f(z)\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(Ap\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(Bp\right)\right]=\int \mathrm{d}z\, f(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[-A+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}B\right]$$

und, da $f(x)$ beliebig, schließlich:

Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}p\left(x,t\mid y,t'\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[-A(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\right]p\left(x,t\mid y,t'\right) \tag{7.6}$$

Beispiel. $A=0$, $B=1$ führt zur Diffusionsgleichung, welche die Brown'sche Bewegung beschreibt: *„Wiener-Prozess“* (Diffusionskonstante $D=\frac{1}{2}$). Schreibweise, wenn es sich um Wiener-Prozess handelt: W_t statt X_t

7.4 Stochastische Differenzialgleichungen und der Itō-Kalkül

Allgemein ist die Langevin Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=a(x(t),t)+b(x(t),t)\eta(t)$$

$\eta(t)$ sei „höchst unregelmäßig“ (weißes Rauschen), sodass

$$\langle\langle\eta\left(t\right)f\left(x(t)\right)\rangle\rangle=0$$

und insbesondere

$$\langle\langle\eta(t)\rangle\rangle=0 \qquad\qquad \langle\langle\eta(t)\eta(t')\rangle\rangle=\delta(t-t')$$

Behauptung.

$$W_t(\omega_0):=\int_0^t\eta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

ist Wiener-Prozess.

Beweis.

$$\left\langle\left\langle W_t^2\right\rangle\right\rangle=\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^t\mathrm{d}\tau'\,\langle\langle\eta(\tau)\eta(\tau')\rangle\rangle=\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^t\mathrm{d}\tau'\delta(\tau-\tau')=t$$

(Also ist wie zuvor die Diffusionskonstante $D=\frac{1}{2}$)

□

Wir erkennen:

$$\langle\langle\ldots\rangle\rangle = \langle\ldots\rangle$$

Also der üblicher Erwartungswert bezüglich Wahrscheinlichkeitsdichten des Wiener-Prozesses.

Wir schreiben nun die Langevin-Gleichung (7.2) als Integralgleichung um

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}\tau + \int_0^t b\left(x(\tau),\tau\right)\eta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

mit

$$W_t \quad = \quad \int_0^t \eta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

motivieren wir salopp

$$\mathrm{d}W_t = \eta(t)\mathrm{d}t$$

und *definieren* mathematisch sauber (ohne η)

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}\tau + \int_0^t b\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}W_\tau$$

Das ist eine stochastische Integralgleichung; $\int_0^t a\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}\tau$ ist gewöhnliches Riemann-Integral, $\int_0^t b\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}W_\tau$ ist Itoō-stochastisches Integral.

Definition (Itō-stochastisches Integral)**.**

$$\int_0^t b\left(x(\tau),\tau\right)\mathrm{d}W_\tau = \mathrm{qm} - \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^n b\left(x(t_{i-1}),t_{i-1}\right)\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\right\}$$

Dabei ist n die Anzahl der Unterteilungen des Intervalls $[0,t]$; und

$$\mathrm{qm} - \lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\langle (s_n - s)^2 \right\rangle = 0$$

Definition (Itō-stochastische Differentialgleichung)**.**

$$\mathrm{d}x = a\left(x(t),t\right)\mathrm{d}t + b\left(x(t),t\right)\mathrm{d}W_t$$

ist symbolische Schreibweise, bedeutet das gleiche wie die stochastische Integralgleichung.

Satz (Zusammenhang von Itō-stochastischer DGL und Fokker-Planck-Gleichung (o.Bew.))**.**

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}W_t \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-a + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}b^2\right)p$$