Kapitel 5

Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im $\mathbb{R}^3$

Mehrere Variable $x_1, x_2, \ldots, x_k$; eine unbekannte Funktion $y(x_1, x_2, \ldots x_k)$:

$$F\left(x_i, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_j}, \ldots\right) = 0$$

5.1 Einleitung

In der folgenden Übersicht ist $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$

Statische PDG (zeitunabhängig)

$$\begin{aligned} \text{Laplace-Gleichung} \quad & \Delta\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \text{Poisson-Gleichung} \quad & \Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{x}) \\ \text{Schwingungsgleichung} \quad & (\Delta + \lambda)\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

Evolutionsgleichungen (beschreiben zeitliche Entwicklung)

$$\begin{aligned} \text{Wärmeleitungsgleichung} \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\phi(t, \boldsymbol{x}) = 0 \\ \text{Schrödinger-Gleichung} \quad & \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V(\boldsymbol{x})\right)\phi(t, \boldsymbol{x}) = 0 \\ \text{Wellengleichung} \quad & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi(t, \boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

In Analogie zur Klassifikation quadratischer Formen bezeichnet man Differentialoperatoren der Form

$$\mathrm{D} = a_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=3}^{3} a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=3}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t, \boldsymbol{x})$$

(wo a_i, b_i Konstante) als

$$\begin{cases} \text{elliptisch} & \begin{cases} \text{entweder:} & a_0 = b_0 = 0,\ a_{i=1,2,3} \text{ gleiches Vorzeichen} \\ \text{oder:} & a_0 \text{ und } a_i \text{ gleiches Vorzeichen} \end{cases} \\ \text{parabolisch} & a_0 = 0,\ b_0 \neq 0,\ a_{i=1,2,3} \text{ gleiches Vorzeichen} \\ \text{hyperbolisch} & a_0 > 0,\ a_{i=1,2,3} < 0 \end{cases}$$

Es sind:

- elliptisch: Laplace-, Poisson- und Schwingungssleichung
- parabolisch: Wärmeleitungs- und Schrödingergleichung, Fokker-Planck-Gleichung
- hyperbolisch: Wellengleichung

5.2 Laplace-Gleichung

5.2.1 Randwertproblem, Eindeutigkeit der Lösung

Suchen Lösung ϕ der Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ im Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$. Je nach Randbedingung (Vorgabe von Werten auf der Oberfläche) heißt das Problem:

$$\begin{aligned} \phi \ldots & \text{ Dirichlet-Problem} \\ \boldsymbol{\nabla}\phi\boldsymbol{n} \ldots & \text{ Neumann-Problem} \end{aligned}$$

(Im zweiten Fall bezeichnet $\boldsymbol{n}$ den nach außen gerichteter Normalenvektor von O)
Um die Eindeutigkeit der Lösung in beiden Fällen zu zeigen, benötigen wir die *Green'schen Sätze*. Dazu beginnen wir beim *Satz von Gauss*:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x = \int_O \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\mathrm{d}o$$

und setzen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \phi\boldsymbol{\nabla}\psi \\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{\nabla}\phi)(\boldsymbol{\nabla}\psi) + \phi\Delta\psi \end{aligned}$$

1. Green'scher Satz

$$\int_V \left[(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\psi) + \phi\Delta\psi\right]\mathrm{d}^3x = \int_O \left[\phi\boldsymbol{\nabla}\psi\boldsymbol{n}\mathrm{d}o\right]$$

2. Green'scher Satz (durch Substition von $\phi \leftrightarrow \psi$ und Subtraktion von der ursprünglichen Gleichung)

$$\int_V \left[\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\right]\mathrm{d}^3x = \int_O \left[(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi)\boldsymbol{n}\mathrm{d}o\right]$$

Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung Es seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Lösungen in V, sodass

$$\Delta\phi_1 = 0 \qquad\qquad \Delta\phi_2 = 0$$

1. Dirichlet-Randbedingungen
   Auf der Oberfläche O von V sind die Werte vorgegeben:

   $$\phi_1 = \phi_2$$

   Sei $u = \phi_2 - \phi_1$

   $$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } V \\ u &= 0 \quad \text{auf } O \end{aligned}$$

   1. Green'scher Satz $\phi = \psi = u$

   $$\begin{aligned} \int_V \left[(\boldsymbol{\nabla} u)^2 + u\Delta u\right] \mathrm{d}^3x = \int_O u(\boldsymbol{\nabla} u)\boldsymbol{n}\mathrm{d}o \\ \int_V (\boldsymbol{\nabla} u)^2 \mathrm{d}^3x =& 0 \end{aligned}$$

   da gemäß VoraussetzungΔu in V und u auf der Oberfläche verschwindet. Daraus folgt weiter $\boldsymbol{\nabla} u = 0$ und damit $u = \text{const}$ in V, und, da $u = 0$ auf $O \subset V$, $u = 0$ in V bzw.

   $$\phi_1 = \phi_2$$

2. Neumann-Randbedingungen
   Diesmal gilt auf der Oberfläche O und, wiederum mit $u = \phi_2 - \phi_1$

   $$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla}\phi_1)\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{\nabla}\phi_2)\boldsymbol{n} \\ \Delta u &= 0 \quad \text{in } V \\ (\boldsymbol{\nabla} u)\boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{auf } O \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \int_V \left[(\boldsymbol{\nabla} u)^2 + u\Delta u\right] \mathrm{d}^3x = \int_O u(\boldsymbol{\nabla} u)\boldsymbol{n}\mathrm{d}o \\ \boldsymbol{\nabla} u = 0 \end{aligned}$$

   Also ist wiederum $u = \text{const}$ in V; aber $(\boldsymbol{\nabla} u)\boldsymbol{n} = 0$ liefert keine weitere Einschränkung, daher ist Eindeutigkeit nur bis auf eine Konstante gegeben:

   $$\phi_2 = \phi_1 + \text{const}$$

Wir besprechen im folgenden einige Ansätze zur Lösung der Laplace-Gleichung; wenn ein Dirichlet- oder Neumann-Problem lösbar ist, wissen wir, dass wir die *eindeutige* Lösung erhalten haben!

5.2.2 Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

So heißt die radialsymmetrische Lösung im $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(r)$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi(r)\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi &= \mathrm{const} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi &= \frac{\mathrm{const}}{r^2} \\
\phi(r) &= \frac{c_1}{r} + c_2
\end{aligned}
$$

Beispiel. ϕ auf Kugelschale vorgegeben

$$
\begin{aligned}
\phi(R_1) &= \phi_1 \\
\phi(R_2) &= \phi_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{c_1}{R_1} + c_2 \\
\phi_2 &= \frac{c_1}{R_2} + c_2 \\
\phi(r)\phi_2 &+ \frac{\phi_1 - \phi_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)
\end{aligned}
$$

Wir verallgemeinern die Fundamentallösung:

$$
\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{c_1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + c_2
$$

ist ebenfalls Lösung der Laplace-Gleichung für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$, wo $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ fix vorgegeben.

Beweis.

$$
\Delta = \nabla^i \nabla^i
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_x^i \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} &= \nabla_y^k \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\bigg|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'} \nabla_y^k (x^i - x'^i) = \nabla_y^k \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\bigg|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'} \delta^{ik} \\
&= \nabla_y^i \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\bigg|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'} \\
\nabla_x^i \nabla_x^i \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} &= \Delta_y \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\bigg|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'} = 0
\end{aligned}
$$

□

5.2.3 Produktansatz in Polarkoordinaten

Falls Randbedingungen für ϕ auf Kugeloberfläche vorliegt, ist Wahl von Polarkoordinaten günstig

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi(r, \vartheta, \varphi) \\
\Delta\phi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \varphi} = 0
\end{aligned}
$$

5.2.3.1 Produktansatz

$$\begin{aligned}
\phi(r,\vartheta,\varphi) &= R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \\
\Theta\Phi\frac{1}{r^2}(r^2R')' + R\Phi\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left(\sin\vartheta\Theta'\right)' + R\Theta\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\Phi'' &= 0 \quad \Big| \frac{r^2}{R\Theta\Phi} \\
\frac{1}{R}(r^2R')' + \frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\left(\sin\vartheta\Theta'\right)' + \frac{\Phi''}{\Phi\sin^2\vartheta} &= 0 \quad \big|\sin^2\vartheta \\
\lambda\sin^2\vartheta + \frac{1}{\Theta}\sin\vartheta(\sin\vartheta\Theta')' + \frac{1}{\Phi}\Phi'' &= 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\lambda = \frac{1}{R}(r^2R')'$ gesetzt; weiters $\mu = -\frac{1}{\Phi}\Phi''$. Zu lösen sind daher

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\mu \tag{5.1}$$

$$\frac{\sin\vartheta}{\Theta}(\sin\vartheta\Theta')' + \lambda\sin^2\vartheta = \mu \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = \lambda \tag{5.3}$$

Zunächst zu Gl. (5.1):

$$\begin{aligned}
\Phi'' + \mu\Phi &= 0 \\
\Phi(\varphi) &= \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sqrt{\mu}\varphi}
\end{aligned}$$

Wir verlangen Periodizät: $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, daraus folgt $\sqrt{\mu} = m \in \mathbb{Z}$.

$$\Phi(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \quad m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \ldots$$

Nun setzen wir $\mu = m^2$ in die Differentialgleichung für Θ (5.2) ein und multiplizieren mit $\frac{\Theta}{\sin^2\vartheta}$:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0$$

Wir setzen $\cos\vartheta = x$

$$\begin{aligned}
\Theta(\vartheta) &= \bar{\Theta}(x) \\
\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\Theta(\vartheta) &= \frac{1}{\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\vartheta}}_{-\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}\bar{\Theta}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\bar{\Theta}(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

$$\left((1-x^2)\bar{\Theta}'(x)\right)' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\bar{\Theta} = 0$$

Vgl. Differentialgleichung Assoziierte Legendre-Polynome (**??**)

$$\left((1-x^2){P'}_l^m\right)' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m = 0$$

Endlichkeit bei $x = \pm 1$ gefordert, daher $\lambda = l(l+1)$ und

$$\Theta(\vartheta) = P_l^m(\cos\vartheta)$$

Zuletzt: $\lambda = l(l+1)$ in radiale Gleichung (5.3) einsetzen

$$\begin{aligned}(r^2R')' - l(l+1)R &= 0\\ r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R &= 0\end{aligned}$$

Ansatz:

$$R(r) = r^\alpha$$

$$\underbrace{[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1)]}_{=0} r^\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha - l(l+1) = 0&\\ \alpha_1 &= l\\ \alpha_2 &= -l-1\end{aligned}$$

und somit

$$R(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases}$$

Wir fassen die winkelabhängigen Lösungen zu Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ (vgl. Abschnitt **??**) zusammen. Damit lautet die Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_l^m r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi) - b_l^m \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta,\varphi)\right] \tag{5.4}$$

Beispiel. $l = m = 0$: $Y_0^0 = \text{const}$

$$a_l^m = b_l^m = 0 \quad \text{wenn}\,(l,m) \neq (0,0)$$

Fundamentallösung:

$$\phi = c_1 + \frac{c_2}{r}$$

5.2.3.2 Randbedingung

auf Oberfläche der Kugel mit Radius R:

$$\phi(R,\vartheta,\varphi) = V(\vartheta,\varphi)$$

- Interessiert man sich für Lösungen innerhalb der Kugel, so darf die Lösung nicht bei $r = 0$ singulär werden $\Rightarrow b_l^m = 0$

- Ist die Lösung außerhalb der Kugel gesucht, darf sie nicht in ∞ divergieren $\Rightarrow a_l^m = 0$

Wenn z.B. Lösung innerhalb der Kugel gesucht ist:

$$V(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^m R^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Gesucht: a_l^m; mit Gl. (**??**)

$$a_{l'}^{m'} = \frac{1}{R^{l'}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta Y^{*m'}_{l'}(\vartheta, \varphi) \cdot V(\vartheta, \varphi)$$

Bemerkung. Die verallgemeinerte Fundamentallösung $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ ist auch in der Separationslösung (5.4) enthalten:

Zur Erinnerung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(r, \vartheta, \varphi)$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}(R, \theta, \phi)$; Entwicklung nach Gl. (**??**) und Gl. (**??**)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\alpha) \begin{cases} \frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^l & r < R \\ \frac{1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^l & r > R \end{cases} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y^{*m}_l(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} \frac{1}{R}(\frac{r}{R})^l & r < R \\ \frac{1}{r}(\frac{R}{r})^l & r > R \end{cases} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vartheta, \varphi) Y^{*m}_l(\theta, \phi) \begin{cases} \frac{1}{R}(\frac{r}{R})^l & r < R \\ \frac{1}{r}(\frac{R}{r})^l & r > R \end{cases} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \begin{cases} a_l^m r^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) & r < R \\ b_l^m \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) & r > R \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei wir in der letzen Zeile $Y^{*m}_l(\theta, \phi)$ in den Koeffizienten zusammengefasst haben, da $\boldsymbol{x}'$ und damit θ und ϕ konstant sind.

5.2.4 Produktansatz in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi \\
x_2 &= \rho\sin\varphi \\
x_3 &= z
\end{aligned}$$

Falls Randbedingung für ϕ auf Zylinderfläche vorliegt, ist Verwendung von Zylinderkoordinaten vorteilhalt.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

5.2.4.1 Produktansatz (für innere Lösung)

$$\phi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\begin{aligned}
\Phi Z(P'' + \frac{1}{\rho}P') + PZ\frac{1}{\rho^2}\Phi'' + P\Phi Z'' &= 0 \\
\frac{1}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\Phi'' + \frac{1}{Z}Z'' &= 0 \\
-\frac{\rho^2}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\Phi'' &= 0
\end{aligned}$$

Diesmal ist

$$k^2 = \frac{1}{Z}Z'' \tag{5.6}$$

$$v = -\frac{1}{\Phi}\Phi'' < 0 \tag{5.7}$$

$$-\frac{\rho^2}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\Phi'' = 0 \tag{5.8}$$

und damit für Gl. (5.6)

$$\begin{aligned}
Z'' - k^2 Z &= 0 \\
Z_{1,2} &= \mathrm{e}^{\pm kz}
\end{aligned}$$

(und damit sind auch die Linearkombinationen $Z_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{kz} \pm \mathrm{e}^{-kz}\right) = \begin{cases} \cosh kz \\ \sinh kz \end{cases}$ Lösungen)

sowie für Gl. (5.7) (vgl. Gl. 5.1)

$$\begin{aligned}
\Phi &= \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{v}\varphi} \\
\Phi &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}
\end{aligned}$$

unter Voraussetzung der Periodizität, mit $v = n^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Die radiale Gleichung (5.8) multiplizieren wir mit $\frac{P}{\rho^2 k^2}$ und setzen im nächsten Schritt $k\rho = x$ und $P(\rho) = \bar{P}(x)$ (und daher $\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x}$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2 k^2}\right)P &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{P}(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\bar{P}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Dies ist eine Bessel'sche DGL, daher:

$$\begin{aligned}
\bar{P}(x) &= J_n(x) \\
P(\rho) &= \bar{P}(k\rho) = J_n(k\rho)
\end{aligned}$$

Bemerkung. $J_n(k\rho) \Leftrightarrow$ innere Lösung, bei $\rho = 0$ *endlich*

5.2.4.2 Lösung des RWP

$$\begin{aligned}\phi(\rho,\varphi,0)=0 \quad &\Rightarrow \quad Z(z)=\sinh kz\\ \phi(1,\varphi,z)=0 \quad &\Rightarrow \quad J_n(k)=0\end{aligned}$$

mit $k=k_{nm}$, den Nullstellen der J_n und $m=1,2,3,\ldots$
also

$$\phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(k_{nm}\rho)\cdot\sinh(k_{nm}z)\cdot(a_{nm}\sin n\varphi+b_{nm}\cos n\varphi)$$

schließlich

$$\phi(\rho,\varphi,L)=V(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(k_{nm}\rho)\cdot\sinh(k_{nm}L)\cdot(a_{nm}\sin n\varphi+b_{nm}\cos n\varphi)$$

und durch Multiplikation/Integration mit $\int_0^{2\pi}d\varphi\sin l\varphi\cdot\int_0^1 J_l(k_{ll'}\rho)\rho\mathrm{d}\rho$ und mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 J_l(k_{lm}\rho)J_l(k_{ln}\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\delta_{mn}\left(J_l'(k_{lm})\right)^2$$

folgen die $a_{ll'}$ und analog die $b_{ll'}$ mit $\int_0^{2\pi}\cos l\varphi\mathrm{d}\varphi\ldots$

5.2.5 Produktansatz in kartesischen Koordinaten

Wenn die Randbedingung auf Quaderoberfläche vorliegt, sind kartesische Koordinaten vorteilhaft.

5.2.5.1 Produktansatz

$$\phi(\boldsymbol{x})=X(x)Y(y)Z(z)$$

Wir dividieren die Laplace-Gleichung durch XYZ:

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0$$

Wir setzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\alpha^2&=-\frac{X''}{X} & \beta^2&=-\frac{Y''}{Y} & \alpha^2+\beta^2&=\frac{Z''}{Z}\\ X&=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha x} & Y&=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\beta y} & Z&=\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\end{aligned}$$

5.2.5.2 Randbedingung

$$\phi=0 \text{ bei }\begin{cases}x=0,1 & X=\sin n\pi x \quad \alpha_n=n\pi\\ y=0,1 & Y=\sin m\pi y \quad \beta_m=m\pi\\ z=0 & Z=\sinh\pi\sqrt{n^2+m^2}z\end{cases}$$

$$\phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh \pi \sqrt{n^2+m^2} z$$

$$z = 1: \quad V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh \pi \sqrt{n^2+m^2}$$

Wieder erhalten wir durch Multiplikation/Integration mit $\int_0^1 \sin k\pi x \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \sin l\pi y \, \mathrm{d}y$ und Anwendung der Orthogonalitätsbedingungen die Koeffizienten a_{kl}.

5.3 Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

In der Elektrodynamik heißt $\phi(\boldsymbol{x})$ *Potential* (an der Stelle $\boldsymbol{x}$) einer Ladungsverteilung, die durch die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x})$ beschrieben wird.

5.3.1 Randwertprobleme und Eindeutigkeit

Genauso wie bei Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= -4\pi\rho \\ \Delta\phi_2 &= -4\pi\rho \\ u &= \phi_2 - \phi_1 \\ \Delta u &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

5.3.2 Green-Funktion

Wir wissen (??): $\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta^3$ bzw.

$$\begin{aligned} \Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) &= \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \phi(\boldsymbol{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3x' \, \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}') \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ Potential (an der Stelle $\boldsymbol{x}$) einer in $\boldsymbol{x}'$ befindlichen, punktförmigen Einheitsladung.

$$\begin{aligned} \Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \text{d.h. } \rho(\boldsymbol{x}) &= \underbrace{1}_{\text{Einheitsladung}} \cdot \underbrace{\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}_{\text{Punktförmig in } \boldsymbol{x}'} \end{aligned}$$

Bemerkung. Für festes $\boldsymbol{x}'$ ist

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = 0$$

für $\rho(\boldsymbol{x}) \in S$ erfüllt $\phi(\boldsymbol{x})$ die Dirichlet-Bedingung

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}) = 0$$

Wie kann allgemeinere Dirichlet-Randbedingung berücksichtigt werden?

5.3.3 Dirichlet-Green-Funktion

Die Green-Funktion der Poissongleichung ist nicht eindeutig, da immer eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung addierbar ist.

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \right) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

wo $\Delta F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0$.

Diese Freiheit ermöglicht das Auffinden der so genannten Dirichlet-Green-Funktion $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$

$$\begin{cases} \Delta \left(-\frac{1}{4\pi}\right) G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') & \\ G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0 & \text{wenn } \boldsymbol{x} \in O \end{cases}$$

und gestattet, Lösung für allgemeine Dirichlet-Randbedingungen anzugeben.

Bemerkung. In der Definition von G_D kommt nur O vor, nicht der Wert von ϕ auf O.

Wir setzen die Lösung ϕ der Poissongleichung sowie $\psi(\boldsymbol{x}) = G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ in den 2. Green'schen Satz ein, wobei

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \qquad\qquad \Delta\psi = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\mathrm{d}^3x = \int_O (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi)\boldsymbol{n}\mathrm{d}o$$

$$\int_V \left[\phi(\boldsymbol{x})\left(-4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right) - G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')(-4\pi\rho(\boldsymbol{x}))\right]\mathrm{d}^3x = \int_O \left[\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla}G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') - G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')_{=0}\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})\right]\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}o$$

wobei auf der rechten Seite $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0$, da dort $\boldsymbol{x} \in O$.

$$\phi(\boldsymbol{x}') = \int_V G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x + \frac{1}{4\pi}\int_O \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla}G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}o$$

Hier ist $\phi(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x} \in O$ bei Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben.

Wir benennen $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ um und verwenden $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = G_D(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$; dann ist die eindeutige Lösung der Poissongleichung bei Dirichlet-Randbedingungen:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_V G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x' + \frac{1}{4\pi}\int_O \phi(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}_{x'}G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}o'$$

5.3.4 Spiegelungsmethode

Zur Konstruktion von $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ersetzen wir V mit Randbedingungsfläche durch ein größeres Volumen ohne Randbedingungsfläche, aber mit zusätzlicher Ladung *im hinzufügten Volumen.* Diese zusätzliche Ladung wird so gewählt, dass ihr Effekt die Randbedingung simuliert

Beispiel.

$$\begin{aligned} V &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\} \qquad \text{Halbraum} \\ O &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{-1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_s|} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} &\quad \dots \quad \text{Potential einer Einheitsladung bei } \boldsymbol{x}' \\ \frac{-1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_s|} &\quad \dots \quad \text{Potential einer negativen Einheitsladung bei gespiegelter Stelle } \boldsymbol{x}'_s \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{x}'_s = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ -x'_3 \end{pmatrix}$$

Tatsächlich ist $G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$, wenn $x_3 = 0$.

Bemerkung.

$$\boldsymbol{x}'_s \notin V \Rightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_s| \neq 0 \Rightarrow \Delta \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_s|} = 0$$

Beispiel (Kugel)**.**

$$\begin{aligned} V &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, |\boldsymbol{x}| < 1\} \\ O &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, |\boldsymbol{x}| = 1\} \end{aligned}$$

$$G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{x}'|}\right)}{|\boldsymbol{x} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}'|^2} \boldsymbol{x}'|} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$$

5.3.5 Multipolentwicklung

Betrachten Poissongleichung mit Randbedingung $\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \phi(\boldsymbol{x}) = 0$, wo $\rho = 0$ außerhalb eines endlichen Volumens V; verwenden 5.5

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) = \int_V \mathrm{d}^3 x' \rho(\boldsymbol{x}') \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_V \mathrm{d}^3 x' \, \rho(\boldsymbol{x}') {Y^*}_l^m(\vartheta', \varphi') Y_l^m(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Q_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \end{aligned}$$

wobei wir

$$Q_l^m = \int_V \mathrm{d}^3 x' \, \rho(\boldsymbol{x}') {Y^*}_l^m(\vartheta', \varphi') \in \mathbb{C}$$

gesetzt haben.

Im Detail:

$$
\begin{aligned}
Q_0^0 =& \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V \mathrm{d}^3x' \rho(\boldsymbol{x}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \\
Q_1^1 =& -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \mathrm{d}^3x' (x_1' - \mathrm{i}x_2') \rho(\boldsymbol{x}') \\
Q_1^0 =& -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V \mathrm{d}^3x' x_3' \rho(\boldsymbol{x}') \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

sei $\boldsymbol{d} \colon = \int_V \mathrm{d}^3x' \, \boldsymbol{x}' \rho(\boldsymbol{x}')$ ... elektrisches Dipolmoment

Also ebenso:

$$
\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{x}}{r^3}
$$

5.4 Schwingungsgleichung

5.4.1 Homogene Schwingungsgleichung

$$
\left(\Delta + \mu^2\right) \phi(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \mu \in \mathbb{R}
$$

5.4.2 Fundamentallösung

Radialsymmetrische Lösung der Schwingungsgleichung in $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$

$$
\phi = \phi(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' + \mu^2 \phi = 0
$$

setzen:

$$
\begin{aligned}
\phi(r) =& \frac{u(r)}{r} \\
\phi'(r) =& \frac{u'r - u}{r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} (u'r - u)' + \mu^2 \frac{u}{r} &= 0 \\
u''r + u' - u' + \mu^2 r u &= 0 \\
u'' + \mu^2 u &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= c_1 \cos \mu r + c_2 \sin \mu r \\
\phi(r) &= c_1 \frac{\cos \mu r}{r} + c_2 \frac{\sin \mu r}{r}
\end{aligned}
$$

Beispiel. Mit Dirichlet-Randbedingung auf Kugelschale

$$(\Delta + \mu^2)\phi = 0 \qquad 0 < |\boldsymbol{x}| \leq R$$

$$\phi(R_1) = \phi_1,\ \phi(R_2) = \phi_2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= c_1 \frac{\cos \mu R_1}{R_1} + c_2 \frac{\sin \mu R_1}{R_1} \\
\phi_2 &= c_1 \frac{\cos \mu R_2}{R_2} + c_2 \frac{\sin \mu R_2}{R_2}
\end{aligned}$$

ist ein Gleichungssystem für c_1 und c_2, dessen Determinante zu berechnen ist

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\cos \mu R_1}{R_1} & \frac{\sin \mu R_1}{R_1} \\ \frac{\cos \mu R_2}{R_2} & \frac{\sin \mu R_2}{R_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2} \sin \mu (R_1 - R_2)$$

Ist μ Eigenwert des RWP – in unserem Beispiel, wenn $\mu_n = n\pi / (R_1 - R_2)$, sodass $\sin \mu_n (R_1 - R_2) = 0$ – so existiert bei homogenen Randbedingungen $\phi_1 = \phi_2 = 0$ eine nichttriviale Lösung der Schwingungsgleichung mit einem unbestimmten Koeffizienten. Bei inhomogenen Randbedingungen muss Lösung nicht immer existieren.

Beispiel. $R_1 = 0$, $c_1 = 0$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{R_2}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= c_2 \frac{\sin \mu_n r}{r} \\
\Phi(R_2) &= c_2 \frac{\sin n\pi}{R_2} = 0
\end{aligned}$$

c_2 ist unbestimmt

Ist μ kein EW des RWP, so ist Schwingungsgleichung eindeutig lösbar, es bleiben keine Koeffizienten unbestimmt.

5.4.3 Produktansatz in Polarkoordinaten

Wenn z.B. die Randbedingung auf Kugeloberfläche vorliegt, Lösung im Inneren gesucht ist

Anwendung: z.B. Luftschwingungen in einem Hohlraum

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

Winkelabhängiger Teil wie bei Laplace-Gleichung

$$\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) = Y_l^m(\vartheta, \varphi) \qquad l = 0, 1, \ldots \ m = -l, \ldots, 0, \ldots, +l$$

Radiale Gleichung

$$r^2 R'' + 2rR' + [\mu^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$$

setzen

$$r = \frac{x}{\mu}$$

$$\begin{aligned} y(x) =& R(r(x)) \\ \dot{y}(x) =& R' \frac{1}{\mu} \\ \ddot{y}(x) =& R'' \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\ddot{y} + \frac{2}{x}\dot{y} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] y = 0$$

setzen $y = x^{-1/2} J(x)$

$$\begin{aligned} \dot{y} =& -\frac{1}{2} x^{-3/2} J + x^{-1/2} J' \\ \ddot{y} =& \frac{3}{4} x^{-5/2} J - x^{-3/2} J' + x^{-1/2} J'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{2}} \left\{ J'' + \frac{1}{x} J' \left(1 - \frac{l(l+1) + \frac{1}{4}}{x^2}\right) J \right\} = 0 \\ J'' + \frac{1}{x} J' + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right) J = 0 \end{aligned}$$

dies ist die Differentialgleichung der Besselfunktion $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$

Diese ist mittels der Γ-Funktion definiert

$$\left(l + \frac{1}{2} + r\right)! = \Gamma\left(l + \frac{1}{2} + r + 1\right)$$

Wir bezeichnen $J_{l+\frac{1}{2}}(x) := j_l(x)$ als *sphärische Besselfunktion.*

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} j_l(\mu r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Beispiel.

$$\phi(R, \vartheta, \varphi) = V(\vartheta, \varphi)$$

und μ sei kein EW, d.h. $j_l(\mu R) \neq 0 \, \forall l = 0, 1, 2, \ldots$
$\Rightarrow$ alle a_{lm} können aus Orthogonalitätsrelation der Kugelfunktionen hergeleitet werden

Beispiel.

$$\phi(R, \vartheta, \varphi) = 0$$

mit Eigenwert μ

Z. B. für

$$j_5(\mu R) = 0$$

sind alle a_{5m} mit $m = -5, -4, \dots, 4, 5$.

unbestimmbare freie Parameter und die Lösung lautet

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=-5}^{5} a_{5m} j_5(\mu r) Y_5^m(\vartheta,\varphi)$$

5.4.4 Inhomogene Schwingungsgleichung

$$(\Delta + \mu^2)\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\tau(\boldsymbol{x})$$

Lösung mittels Greenfunktion ist gesucht

Behauptung.

$$(\Delta + \mu^2)\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r} = -4\pi\delta^3$$

Beweis.

$$\left(\Delta\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r}, \gamma\right) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r}, \Delta\gamma\right)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Distr.=Fkt.}}{=} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\,r^2\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\gamma\right)\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{\infty}(-1)\mathrm{d}r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r}\right)r^2\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\left[-\int_0^{\infty}\mathrm{d}r(-1\pm\mathrm{i}\mu r)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right]\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\left\{-\gamma|_{r=0} + \int_0^{\infty}\mathrm{d}r[\pm\mathrm{i}\mu\pm\mathrm{i}\mu(-1\pm\mathrm{i}\mu r)]\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}\gamma\right\}\\
&= -4\pi\gamma(\mathbf{0}) - \mu^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\,r^2\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r}\gamma(\boldsymbol{x})\\
&= \left(-4\pi\delta^3,\gamma\right) - \mu^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu r}}{r},\gamma\right)
\end{aligned}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x'$$

□

5.5 Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} &= a^2\Delta\phi(\boldsymbol{x},t)\\ \phi(\boldsymbol{x},0) &= f(\boldsymbol{x})\in S\end{cases}$$

wo $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, $t>0$, $a^2>0$, $f(\boldsymbol{x})\in S\dots$ vorgegebene Temperaturverteilung

Neue Lösungsmethode: Fouriertransformation bzgl. $\boldsymbol{x}$. Zweimalige Anwendung von **??** auf die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) &= a^2 \Delta \phi(\boldsymbol{x}, t) \\ \frac{\partial (\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, t)}{\partial t} &= -a^2 \boldsymbol{k}^2 (\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, t)\end{aligned}$$

wobei wir die erste Zeile mit $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{kx}} \mathrm{d}^3 x$ integriert und $(\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{kx}} \phi(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}^3 x$ verwendet haben.

Integration dieser gewöhnlichen DGL ergibt

$$(\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, t) = c(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, 0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{kx}} \underbrace{\phi(\boldsymbol{x}, 0)}_{f(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}^3 x = (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k}) \\ (\mathcal{F}\phi)(\boldsymbol{k}, t) &= (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}\end{aligned}$$

Produkt zweier Funktionen in k: Faltung

Rücktrafo (vgl. Faltungsformel **??**; hier $\mathcal{F}^{-1}$ statt $\mathcal{F}$):

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}, t) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \circ \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}\right) = f \circ \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}\right) \\ \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right) t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} \mathrm{d}^3 k\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck faktorisiert in 3 Integrale über k_1, k_2, k_3

Ein Integral herausgegriffen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 p^2 t + \mathrm{i}px} \mathrm{d}p &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p'^2}{2} + \mathrm{i}p' \frac{x}{\sqrt{2ta}}} \mathrm{d}p' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2ta}}\right)^2} \mathrm{d}p' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2ta}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4ta^2}}\end{aligned}$$

wo $p = \frac{1}{\sqrt{2ta}} p'$ und $\mathrm{d}p = \frac{1}{\sqrt{2ta}} \mathrm{d}p'$; weiters $q = p' - \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{2ta}}$ (und $\mathrm{d}q = \mathrm{d}p'$) und nach Auswertung des Gauss'schen Integrals über q

Dreimal dasselbe Procedere:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-a^2 \boldsymbol{k}^2 t}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2ta}}\right)^3 \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4ta^2}} \\ \Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2ta}}\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{4ta^2}} f(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}^3 x'\end{aligned}$$

Faltung = Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit AWP

5.6 Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = \left(-\frac{1}{2}\Delta + V(\boldsymbol{x},t)\right)\psi(\boldsymbol{x},t) \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

Falls V zeitunabhängig ist, d.h. $V = V(\boldsymbol{x})$, ist Produktansatz möglich

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x})f(t)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\phi\dot{f} &= \left(-\frac{1}{2}\Delta\phi + V(\boldsymbol{x},t)\phi\right)f \\
\frac{\mathrm{i}\dot{f}}{f} &= \frac{-\frac{1}{2}\Delta\phi + V\phi}{\phi} = E = \mathrm{const} \\
\mathrm{i}\dot{f} &= Ef \\
f(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \\
\left(-\frac{1}{2}\Delta + V - E\right)\phi(\boldsymbol{x}) &= 0
\end{aligned}$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung (elliptischer Typ)

Wegen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik verlangen wir, dass $\phi(\boldsymbol{x})$ quadratintegrabel ist: $\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*\phi\mathrm{d}^3x = 1$; dies ist ein verallgemeinertes Sturm-Liouville-Problem (Polynomlösung!)

Beispiel. H-Atom

$$V = -\frac{1}{r}$$

Separationsansatz für ϕ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r} - E\right)\phi(\boldsymbol{x}) &= 0 \\
\phi(\boldsymbol{x}) &= R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)
\end{aligned}$$

Wissen schon von Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) &= Y_l^m(\vartheta,\varphi) \\
l &= 0,1,2,\dots \\
m &= -l,\dots,l
\end{aligned}$$

mit

$$-\frac{1}{2}R'' - \frac{1}{r}R' + \left(-\frac{1}{r} - E + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right)R = 0$$

Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
R(r) =& \frac{y(r)}{r} \\
R'(r) =& \frac{y'}{r} - \frac{y}{r^2} \\
R''(r) =& \frac{y''}{r} - \frac{2y'}{r^2} + \frac{2y}{r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\frac{y''}{r} - \frac{2y'}{r^2} + \frac{2y}{r^3}\right) - \frac{y'}{r^2} + \frac{y}{r^3} + \left(-\frac{1}{r} - E + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right)\frac{y}{r} &= 0 \\
y'' + \left(\frac{2}{r} + \underbrace{2E}_{\varepsilon} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) y &= 0 \\
y'' + \left(\varepsilon + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) y &= 0
\end{aligned}
$$

und setzen weiters

$$
y(r) = x^{l+1}\mathrm{e}^{-x/2} w(x)
$$

$$
x = 2r\sqrt{-\varepsilon}
$$

$$
xw''(x) + (2l + 2 - x)w'(x) + \left(\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} - l - 1\right) w(x) = 0
$$

Nur wenn $\left(\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} - l - 1\right) = 0, 1, 2, \ldots$ liegt eine normierbare Lösung vor, also eine Lösung in Form eines Polynoms (für Quantenmechanik entscheidend)

Fordern also: $\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} = n = \{1, 2, 3, \ldots\}$, sodass $\left(\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} - l - 1\right) = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

Nur in diesem Fall ist ϕ quadratintegrabel, da $w(x)$ ein Polynom (genauer: ein Laguerrepolynom) ist.

$$
\Rightarrow w(x) = L_{n-l-1}^{2l+1}(x)
$$

$$
\Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = \sum_n \sum_l \sum_m a_{nlm} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1} \mathrm{e}^{-r/n}}{r} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right)
$$

bzw.

$$
\psi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} b_{nlm} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}t}{2r^2}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \cdot r^l \mathrm{e}^{-\frac{r}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right)
$$

(Faktoren in dieser Gleichung sind vermutlich nicht ganz richtig)

In der Quantenmechanik sind normierte Eigenfunktionen wichtig.

5.7 Wellengleichung

$$
\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta\phi(\boldsymbol{x}, t) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3
$$

5.7.1 Radialsymetrische Lösung

beschreibt kugelsymmetrische Ausbreitung von Schallwellen im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi&=0\\ \phi(\boldsymbol{x},0)&=\varphi(r)\\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},0)&=0\end{aligned}$$

setzen

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{y(r,t)}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}&=0\\ y(r,0)&=r\varphi(r)\\ \dot{y}(r,0)&=0\end{aligned}$$

ist eine eindimensionale Wellengleichung

führen neue Variable ein:

$$\begin{aligned}\xi&=r+t\\ \eta&=r-t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=y(r(\xi,\eta),t(\xi,\eta))\\ \Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}&=0\Rightarrow u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta)\\ &\Rightarrow y(r,t)=F(r+t)+G(r-t)\end{aligned}$$

D'Alembert'sche Lösung für 1-dimensionale Wellengleichung

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}y(r,0)&=r\varphi(r)\\ y'(r,0)&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F(r)&=\frac{1}{2}\left(c+r\varphi(r)\right)\\ G(r)&=\frac{1}{2}\left(-c+r\varphi(r)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(r,t)&=\frac{1}{2}[(r+t)\varphi(r+t)+(r-t)\varphi(r-t)]\\ \phi(r,t)&=\frac{1}{2r}[(r+t)\varphi(r+t)+(r-t)\varphi(r-t)]\end{aligned}$$

5.7.2 Stationäre Lösung

beschreibt stehende Wellen in Hohlräumen

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} - \Delta\phi = 0$$

$\phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$ an der Stelle $|\boldsymbol{x}| = R$

Produktansatz:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \psi(\boldsymbol{x}) f(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}\psi - f\Delta\psi &= 0 \\ \underbrace{\frac{\ddot{f}}{f}}_{-\mu^2} &= \underbrace{\frac{\Delta\psi}{\psi}}_{-\mu^2} \end{aligned}$$

Schwingungsgleichung:

$$\psi(\boldsymbol{x})|_{|\boldsymbol{x}|=R} = 0$$

$$f(t) = a\sin\mu t + b\cos\mu t, \qquad \Delta\psi + \mu^2\psi = 0$$

5.7.3 Ebene Wellen

Produktansatz:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx} - \omega t)}$$

wo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2 \ldots$fixer Vektor $\equiv$ Ausbreitungsrichtung der Wellen

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-\omega^2 + \boldsymbol{k}^2\right)}_{=0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx} - \omega t)} = 0$$

Wieso heißt $\phi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx} - \omega t)}$ ebene Welle?

$$\boldsymbol{kx} - \omega t = k\left(\boldsymbol{nx} - t\right)$$

wobei $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$ und $|\boldsymbol{n}| = 1$

$\boldsymbol{x}$ seien Orte konstanter Phase:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{nx} - t &= \text{const} \\ \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{n}\left(t + \text{const}\right)\right) &= 0 \\ \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t)\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{n}\left(\text{const} + t\right)$$

ist Ebenengleichung für $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_0$ (und somit die Ebene) bewegt sich in Richtung $\boldsymbol{n}$ mit Geschwindigkeit 1

5.7.4 Inhomogene Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{x},t) = -4\pi\varrho(\boldsymbol{x},t)$$

Vorzeichen sind analog zu Poissongleichung

retardierte Greenfunktion

(kann ja mehrere verschiedene Greenfunktionen für Wellengleichung wählen, aber diese hier ist besonders praktisch, weil die Laufzeit darin berücksichtigt ist, die die zu $(\boldsymbol{x},t)$ ausgesandte Welle (Störung) benötigt, an den Punkt $(\boldsymbol{x}',t')$ zu kommen)

2 Bedingungen an Greenfunktion:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_{\mathrm{ret}}\left(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t'\right) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t')$$

$$G_{\mathrm{ret}}\left(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t'\right) = \frac{\partial}{\partial t}G_{\mathrm{ret}}\left(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t'\right) = 0 \quad \text{für } t<t'$$

Behauptung.

$$G_{\mathrm{ret}}\left(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t'\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|-t+t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

Beweis. Betrachten Testfunktionen $\gamma(\boldsymbol{x})$, $\tau(t)\in S$

zu zeigen:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_{\mathrm{ret}}\left(\gamma(\boldsymbol{x})\tau(t)\right) = \gamma(\boldsymbol{0})\tau(0)$$

also

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_{\mathrm{ret}}\left(\gamma\tau\right) = G(\tau\Delta\gamma - \gamma\ddot{\tau})$$

benutzen jetzt $G_{\mathrm{ret}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(r-t)}{r}$

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_{\mathrm{ret}}\left(\gamma\tau\right) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\left(\tau(r)\Delta\gamma(\boldsymbol{x}) - \gamma(\boldsymbol{x})\tau''(r)\right)\\ &= \dots\\ &= \gamma(\boldsymbol{0})\tau(0)\end{aligned}$$

□

$$\Rightarrow \phi(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x'\,\frac{\delta(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|-t+t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\varrho(\boldsymbol{x}',t')$$

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

Ladungsdichte des gesamten Raumes trägt bei, allerdings ist der Beitrag jedes Punktes von entsprechend früherer Zeit: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (=1 in unseren Einheiten) der Störung ist berücksichtigt!

5.7.5 Allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

2. Greenscher Satz $\int_0^\tau \mathrm{d}t$, $\tau > t'$

$$\int_0^\tau \mathrm{d}t \int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\,\mathrm{d}^3x = \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_O (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi)\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}o$$

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x},t) &= -4\pi G_{\mathrm{ret}}\left(\boldsymbol{x},-t,\boldsymbol{x}',-t'\right) \\
\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{x},t) &= -4\pi\delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right)\delta(t-t') \\
\phi(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \text{für } t > t'
\end{aligned}$$

$\psi(\boldsymbol{x},t)\ldots$ Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = -4\pi\rho(\boldsymbol{x},t)$$

Linke Seite:

$$4\pi\psi(\boldsymbol{x}',t') - 4\pi\int_0^\tau \mathrm{d}t\int_V \mathrm{d}^3x\frac{\delta\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| - t' + t\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x},t) \overset{\text{p.I. bez. d}t}{+} \int_0^\tau \mathrm{d}t\int_V \mathrm{d}^3x\left[\phi(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},t) - \psi(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{x},t)\right]$$

$\tau > t'$ haben wir so gewählt Kopien

Gemischte Ableitungsterme heben sich weg

$$\int_V \mathrm{d}^3x\left[\phi(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) - \psi(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},t)\right]_0^\tau$$

Beachte, dass $\phi(\boldsymbol{x},\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},\tau) = 0$, weil $\tau > t'$

$$= -\int_V \mathrm{d}^3x\left[\phi(\boldsymbol{x},0)\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) - \psi(\boldsymbol{x},0)\frac{\partial\phi}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)\right]$$

Beschränken uns auf $V = \mathbb{R}^3$

Allgemeine Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x},0) &= f(\boldsymbol{x}) \\
\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) &= h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Nehmen an, dass $f(\boldsymbol{x})$ und $h(\boldsymbol{x})$ für $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ geeignet abfallen, sodass R.S. $= 0$!

Somit ergibt sich:

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \int \mathrm{d}^3x\frac{\rho(\boldsymbol{x},t' - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x\left[\phi(\boldsymbol{x},0)h(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)\right]$$

In den rechten Term setzen wir ϕ und $\frac{\partial}{\partial t}\phi$ ein; d^3x: Polarkoordinaten um Mittelpunkt $\boldsymbol{x}'$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}r$ mit δ-Distr. integrieren!

$$\frac{1}{4\pi}\left[\int_O \frac{h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}o}{t'} + \frac{\partial}{\partial t'}\int_O \frac{f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}o}{t'}\right]$$

$O\ldots$ Kugelschale um $\boldsymbol{x}'$,Radius t'

vertauschen der Übersichtlichkeit halber $(\boldsymbol{x},t) \leftrightarrow (\boldsymbol{x}',t')$ und erhalten *Poisson'sche Lösung* der Wellengleichung:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^3x \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{1}{4\pi}\left[\int_O \frac{h(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}o'}{t} + \frac{\partial}{\partial t}\int_O \frac{f(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}o'}{t}\right]$$