

Kapitel 4

Theorie der Distributionen

Motivation: Dirac'sche Delta„funktion“ δ

$$\delta(x) \stackrel{?}{=} \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$
$$\int \delta(x)f(x)dx \stackrel{?}{=} f(0)$$

Mathematisch konsistenter Formalismus: *Distribution* ist ein lineares, stetiges Funktional über den Raum der Testfunktionen S

Anwendung: Greensfunktionsmethode zum Lösen von inhomogenen DGL.

4.1 Grundlegende Definitionen

Die δ -Funktion und andere „singuläre“ Funktionen kommen i. A. nur in Zwischenrechnungen vor. Im Endresultat fehlen sie entweder völlig oder sie treten unter einem Integralzeichen als Faktor in einem Produkt mit einer „genügend“ braven Funktion auf. Es ist nicht nötig zu überlegen, was eine singuläre Funktion ist, sondern bloß, was das Integral über ihr Produkt mit einer solchen „braven“ Funktion bedeutet. Dazu betrachten wir zunächst einige Eigenschaften der *Schwarz'schen* Klasse S , die schon in Abschnitt ?? eingeführt wurde.

Raum der Testfunktionen S (Schwarz'sche Klasse) Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, sodass f und alle ihre Ableitungen schneller als jede Potenz von x bei $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Beispiel. $e^{-x^2} \in S$, $x^5 e^{-x^2} \in S$, $e^{-x} \notin S$

Definition. Die Abbildung $g : S \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma \in S \mapsto g(\gamma) \in \mathbb{C}$ heißt *Funktional* über S

Definition. g heißt *lineares Funktional* über S , falls

$$g(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) = \lambda g(\gamma_1) + \mu g(\gamma_2) \quad \text{wo } \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \gamma_1, \gamma_2 \in S$$

Definition. g heißt *stetiges lineares Funktional* über S , falls für Folgen $\gamma_n \in S$, die gegen $\gamma \in S$ im Sinne von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{R}} \left| |x|^p \frac{d^m}{dx^m} (\gamma_n(x) - \gamma(x)) \right| = 0 \quad \forall p, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

konvergieren, gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\gamma_n) = g(\gamma)$

Wir bezeichnen g auch als *temperierte Distribution*, alle solchen Funktionale bilden den Raum S'

Satz. Für jede temperierte Distribution $g \in S'$ gibt es eine (so genannte reguläre) Folge $g_n \in S$, sodass

$$g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) \gamma(x) \quad \forall \gamma \in S$$

Wir nennen γ Testfunktion.

Definition. 2 reguläre Folgen $\{g_n\}, \{h_n\}$ heißen äquivalent, wenn $\forall \gamma \in S$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \gamma(x) dx$$

Bemerkung. Reguläre Folgen sind in Äquivalenzklassen geteilt. Alle regulären Folgen aus einer Äquivalenzklasse definieren die selbe Distribution.

Beispiel.

$$\left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\}$$

definiert die **Dirac'sche Deltafunktion** δ

$$\delta(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \gamma(x) dx$$

Bemerkung.

$$\delta(\gamma) = \gamma(0)$$

Beweis.

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} \gamma(x) dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} (\gamma(x) - \gamma(0)) dx + \gamma(0) \underbrace{\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

weilers:

$$|\gamma(x) - \gamma(0)| = \left| \int_0^x \frac{d\gamma}{dx'} dx' \right| \leq \text{const.} \cdot x$$

da $\frac{d\gamma}{dx'} \in S$, gibt es ein $\xi_0 \in [0, x]$, sodass $\frac{d\gamma}{dx'} \Big|_{\xi} \leq \frac{d\gamma}{dx'} \Big|_{\xi_0} = \text{const.} \forall \xi \in [0, x]$

(jede Funktion aus S stetig, fällt gegen 0 ab, muss dazwischen Max/Min haben)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} (\gamma(x) - \gamma(0)) dx \right| \leq \text{const.} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n}{\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-nx^2} x dx}_{-\frac{1}{n} e^{-nx^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n}} = \frac{\text{const.}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Bemerkung. $\left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\}$ und $\left\{ \sqrt{\frac{3n}{\pi}} e^{-3x^2 n} \right\}$ sind äquivalente Folgen für δ .

4.2 Konventionelle Funktionen als Distributionen

4.2.1 Motivation

$$g : \gamma \in S \qquad f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) dx \qquad f(x)$$

Für Distributionen wir häufig auch die rein symbolische Notation, die das gleiche bedeutet, verwendet:

$$g(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \gamma(x) dx$$

Beispiel.

$$\delta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \gamma(x) dx$$

Analog schreiben wir $(\mathcal{F}\delta)(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1(\gamma)$ symbolisch als

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\delta)(k) \gamma(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma(k) dk$$

oder, noch weiter symbolisch:

$$(\mathcal{F}\delta)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

oder, noch weiter symbolisch:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \right\} e^{-ik0} \{dx\} = 1$$

also gemäß symbolischer Regel (als ob wir $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = e^{-ikx} \Big|_{x=0}$ verwendet hätten) mit Streichen (hier durch geschwungene Klammern symbolisiert).

4.2.2 Formale Diskussion

Sei eine konventionelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben

Wenn es ein $\mu \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)| dx}{(1+x^2)^\mu} < \infty$$

kann man eine reguläre Folge $f_n \in S$ explizit angeben, die eine Distribution mittels des konventionellen Integrals über f definiert. Wir bezeichnen diese Distribution kurzerhand mit f .

$$f(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma(x) dx$$

Das Integral auf der rechten Seite ist dabei nicht symbolisch gemeint, sondern als konventionelles Integral zu verstehen. Vorsicht ist insofern geboten, als f hier sowohl eine Funktion wie auch eine Distribution bezeichnet.

Beispiel. $f(x) = 1$

1 ist offensichtlich auch temperierte Distribution, da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 \, dx}{1+x^2} < \infty, \quad \mu = 1$$

und gemäß vorigem Satz

$$1(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \gamma(x) \, dx$$

tatsächlich existiert eine reguläre Folge, die das bewirkt: $\left\{ e^{-\frac{x^2}{n}} \right\}$

Beweis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/n} \gamma(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2/n} - 1) \gamma(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

$$\left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = \left| \int_0^x \frac{d}{dx'} (e^{-x'^2/n}) dx' \right| = \left| \int_0^x \frac{-2x' e^{-x'^2/n}}{n} dx' \right| \leq \left| \int_0^x \frac{2x'}{n} dx' \right| = \frac{x^2}{n}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2/n} - 1) \gamma(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| x^2 \gamma(x) \right|}_{\in S} \, dx = \frac{\text{const.}}{n} \rightarrow 0$$

□

weilers:

Beispiel. $f(x) = x$

$$x(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} x \gamma(x) \, dx$$

Beispiel. $f(x) = \Theta(x)$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Theta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \gamma(x) \, dx = \int_0^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(x) \, dx}{1+x^2} < \infty$$

$$\Theta(\gamma) = \int_0^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

Beispiel. $f(x) = \ln|x|$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|x| \, dx}{1+x^2} < \infty$$

$$\ln |x|(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln |x| \gamma(x) dx$$

Häufige Schreibweisen für Distributionen:

$$\begin{aligned} g(\gamma) \\ (g, \gamma) \\ g(x)(\gamma) \\ (g(x), \gamma(x)) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \gamma(x) dx \end{aligned}$$

Diese letzte *Schreibweise* wird sehr gerne von PhysikerInnen verwendet. Man beachte aber die zugehörige Definition mittels regulärer Folgen!

4.3 Rechenregeln

4.3.1 Summe

Seien:

$\{g_n\}$ reguläre Folge für g

$\{h_n\}$ reguläre Folge für h

Definition.

$$\begin{aligned} (g + h)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g_n(x) + h_n(x)) \gamma(x) dx = g(\gamma) + h(\gamma) \\ (g + h)(\gamma) &= g(\gamma) + h(\gamma) \end{aligned}$$

4.3.2 Lineare Transformationen

Sei $\{g_n\}$ reguläre Folge für g

Definition.

$$\begin{aligned} (g(ax + b), \gamma(x)) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(ax + b) \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x') \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x' - b}{a}\right) dx' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x - b}{a}\right) dx \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde $x' = ax + b$ gesetzt, wobei auch $g_n(x') \in S$.

$$(g(ax + b), \gamma(x)) = \left(g(x), \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x - b}{a}\right) \right)$$

Beispiel.

$$(\delta(x - x_0), \gamma(x)) = (\delta(x), \gamma(x + x_0)) = \gamma(x_0)$$

In anderer Schreibweise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \gamma(x) dx = \gamma(x_0)$$

Beispiel.

$$(\delta(ax), \gamma(x)) = \left(\delta(x), \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x}{a}\right) \right) = \frac{1}{|a|} \gamma(0)$$

4.3.3 Produkt

Das Produkt zweier Distributionen ist im Allgemeinen nicht definierbar.

Beispiel.

$$\{g_n\} = \left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\} \dots \delta\text{-Funktion}$$

$$\begin{aligned} g^2(\gamma) &\stackrel{???}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n^2(x) \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} e^{-x^2 2n} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \gamma(0) = 0 \end{aligned}$$

Definition. Eine Funktion $\Psi(x)$ heißt *schwach wachsend*, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist und wenn für alle $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^{-n_0} \frac{d^k}{dx^k} \Psi(x) \right| = 0$$

Beispiel.

$$\begin{array}{ll} \Psi(x) = & ax^2 - 5x^9 \quad \text{Polynome} \\ & e^{-x^2} \quad \in S \\ & e^{-x} \quad \text{nicht schwach wachsend} \end{array}$$

Satz. Wenn $\gamma \in S$ und Ψ schwach wachsend, dann ist $\Psi\gamma \in S$

Beweis. Z.z., dass $\forall r, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^r \frac{d^k}{dx^k} \Psi\gamma(x) \right| = 0$$

Ein typischer Term von $\frac{d^k}{dx^k} \Psi\gamma$ ist $\frac{d^s \Psi}{dx^s} \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} \gamma$:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^r \frac{d^s \Psi}{dx^s} \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} \gamma \right| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^{-n_0} \frac{d^s \Psi}{dx^s} x^{r+n_0} \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} \gamma \right| = 0$$

Dabei geht der Faktor $x^{-n_0} \frac{d^s \Psi}{dx^s}$ gegen Null, weil Ψ schwach wachsend, und der Faktor $x^{r+n_0} \frac{d^{k-s} \gamma}{dx^{k-s}}$ geht gegen Null, weil $\gamma \in S$ ist.

□

Definition. Sei g temperierte Distribution und Ψ schwach wachsend

$$\begin{aligned} (\Psi g)(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\Psi(x) g_n(x)}_{\in S} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \underbrace{\Psi(x) \gamma(x)}_{\in S} dx \\ &= g(\Psi \gamma) \\ (\Psi g)(\gamma) &= g(\Psi \gamma) \end{aligned}$$

Beispiel.

$$(x\delta)(\gamma) = \delta(\underbrace{x\gamma}_{\in S}) = x\gamma(x)|_{x=0} = 0$$

kurz

$$\begin{aligned} x\delta &= 0 \\ (x\delta)(\gamma) &= 0(\gamma) \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot \gamma(x) dx = 0 \end{aligned}$$

4.3.4 Differentiation von Distributionen

Definition.

$$\begin{aligned} g'(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g'_n(x)}_{\in S} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[g_n(x) \gamma(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma'(x) dx \right] \\ &= 0 - g(\gamma') \end{aligned}$$

Der linke Term verschwindet, da der Integrand Element von S ist.

$$g'(\gamma) = -g(\gamma')$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} \Theta'(\gamma) &= -\Theta(\gamma') = - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \gamma'(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} \gamma'(x) dx = - \underbrace{\gamma(x)}_{\in S} \Big|_0^{\infty} = +\gamma(0) = \delta(\gamma) \end{aligned}$$

also kurz:

$$\Theta' = \delta$$

Wir können mittels Ableitung weitere Distributionen definieren

Beispiel.

$$x^{-1}(\gamma) := \ln |x'|(\gamma)$$

Der natürliche Logarithmus $\ln |x|$ ist hier als temperierte Distribution – wie bereits bekannt – gemeint.

Kurz:

$$x^{-1} = \ln |x'|$$

Bemerkung. Wenn g temperierte Distribution und Ψ schwach wachsend gilt:

$$(\Psi g)' = \Psi' g + \Psi g'$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\Psi g)'(\gamma) &= -\Psi g(\gamma') = -g(\Psi \gamma') = -g(-\Psi' \gamma + (\Psi \gamma)') \\ &= -g(-\Psi' \gamma) - g((\Psi \gamma)') = \Psi' g(\gamma) + g'(\Psi \gamma) = \Psi' g(\gamma) + \Psi g'(\gamma) \end{aligned}$$

Jede Distribution ist darstellbar als Ableitung einer stetigen und schwach wachsenden Funktion

□

Beispiel.

$$(x\Theta)' = 1\Theta + x\Theta' = \Theta + \underbrace{x\delta}_0 = \Theta(\gamma) \quad (4.1)$$

Wer's nicht glaubt:

$$\begin{aligned} (x\Theta)'(\gamma) &= -x\Theta(\gamma') = -\Theta(x\gamma') = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)x\gamma' dx = -\int_0^{\infty} x\gamma'(x) dx \\ &= -x\gamma|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\gamma(x) dx = \Theta(\gamma) \end{aligned}$$

Bemerkung. Temperierte Distributionen haben beliebig hohe Ableitungen

Beispiel.

$$\begin{aligned} g''(\gamma) &= -g'(\gamma') = +g(\gamma'') \\ \delta''(\gamma) &= \delta(\gamma'') = \gamma''(0) \end{aligned}$$

Satz. (ohne Beweis)

Jede temperierte Distribution ist darstellbar als (mehrfache) Ableitung einer stetigen, höchstens schwach wachsenden Funktion

Beispiel.

$$\begin{aligned} \delta &= (x\Theta)'' \\ (x\Theta)'' &= \underbrace{((x\Theta)')}_{\Theta} = \Theta' = \delta \end{aligned}$$

unter Benutzung von Gleichung 4.1.

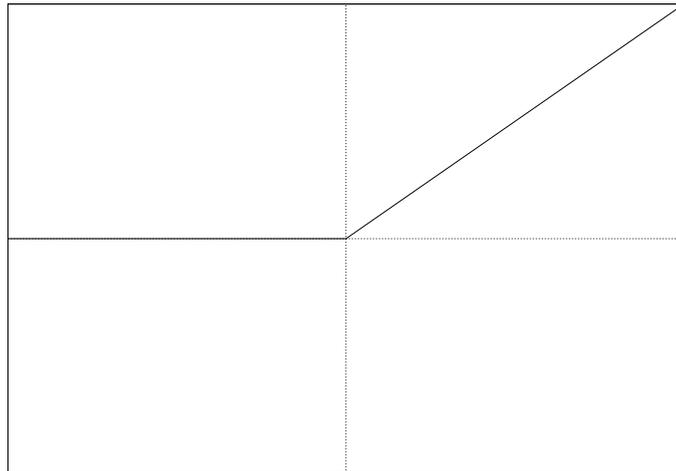


Abbildung 4.1: $x\Theta(x)$

4.4 Fouriertransformation von Distributionen

4.4.1 Kurze Wiederholung der Fouriertransformation

Siehe auch Abschnitt ??; mit $f \in S$, $k \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$(\mathcal{F}f)$ ist kein Funktional, sondern Definition der Fouriertransformation. Diese

- ist gleichmäßig konvergent in $k \in \mathbb{R}$
- bildet S auf sich selbst ab, d.h. wenn $f \in S \Rightarrow \mathcal{F}f \in S$

Beispiel. $f(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow (\mathcal{F}f)(k) = e^{-k^2/2}$

Umkehrtransformation

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{+ikx} dk$$

Rechenregeln Es gilt für $f, g \in S$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f$$

Differentiation

$$(\mathcal{F}f')(k) = ik(\mathcal{F}f)(k) \tag{4.2}$$

$$(\mathcal{F}f)'(k) = (\mathcal{F}(-ixf))(k) \tag{4.3}$$

Faltungsformeln

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g \quad (4.4)$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \quad (4.5)$$

wo

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x') dx' = (g \circ f)(x) \quad (4.6)$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(x)g(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}g)(x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}^{-1}f)(x)g(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}^{-1}g)(x) dx \end{aligned}$$

4.4.2 Fouriertransformation einer temperierten Distribution

Definition.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g_n)(x)\gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)(\mathcal{F}\gamma)(x) dx \\ &= g(\mathcal{F}\gamma) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}g)(\gamma) = g(\mathcal{F}\gamma)$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\delta)(\gamma) &= \delta(\mathcal{F}\gamma) = (\mathcal{F}\gamma)(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \underbrace{e^{i0x}}_1 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\gamma) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}1)(\gamma) &= 1(\mathcal{F}\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot (\mathcal{F}\gamma)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\gamma)(k) dk = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\gamma)(k) e^{ik0} dk \\ &= \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\gamma))(0) = \sqrt{2\pi}\gamma(0) \\ &= \sqrt{2\pi}\delta(\gamma) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\delta$$

Definition.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}^{-1}g_n)(x)\gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)(\mathcal{F}^{-1}\gamma)(x) dx \\ &= g(\mathcal{F}^{-1}\gamma)\end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) = g(\mathcal{F}^{-1}\gamma)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) &= g \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g) &= g\end{aligned}$$

Beweis.

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) = (\mathcal{F}^{-1}g)(\mathcal{F}\gamma) = g(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\gamma)) = g(\gamma)$$

□

Weitere Formeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g' &= ix\mathcal{F}g \\ (\mathcal{F}g)' &= \mathcal{F}(-ixg)\end{aligned}$$

Bemerkung.

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

hat die sehr häufig verwendete *äquivalente Notation*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx} dx = 1$$

so, als ob wir $e^{-ikx}|_{x=0} = 1$ verwendet hätten.

Ähnlicherweise *schreibt* sich

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\delta$$

als

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi}\delta(k)$$

sodass formal (stimmt natürlich von der Schreibweise her so nicht – kann 1 nicht fouriertransformieren – ist aber kurz und trotzdem richtig)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \delta(k)$$

4.5 Faltung von Distributionen

Faltung ist selbst etwas ähnliches wie Distribution...

Definition. Seien Ψ eine schwach wachsende Funktion mit zugehöriger regulärer Folge $\{\Psi_n\}$, wo $\Psi_n \in S$, sowie Funktion $f \in S$ gegeben. Dann gilt

$$\underbrace{(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)}_{\in S'}(\underbrace{k}_{\in \mathbb{R}}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\mathcal{F}\Psi_n)}_{\in S}(p) \underbrace{(\mathcal{F}f)}_{\in S}(k-p) dp$$

Einschub:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(k-p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(k-p)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} e^{ipx} dx \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(f(x)e^{-ikx}))(p) \end{aligned}$$

somit:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(p) (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f(x)e^{-ikx}))(p) dp \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(p) \underbrace{f(p)e^{-ikp}}_{\in S} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p) f(p) e^{-ikp} dp = \mathcal{F}(\Psi f)(k) \end{aligned}$$

also:

$$(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}(\Psi f)(k) \tag{4.7}$$

Definition (Faltung von Distributionen). Ähnlich wie das Produkt ist auch die Faltung von Distributionen nur eingeschränkt möglich.

Sei g temperierte Distribution, $\{g_n\}$ die zugehörige reguläre Folge, $g_n \in S$, Ψ schwach wachsende Funktion. Dann ist, unter Verwendung von Gl. 4.7,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g_n)(x)\gamma(x) \, dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}(\Psi g_n))(x)\gamma(x) \, dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n \Psi(x)(\mathcal{F}\gamma)(x) \, dx \\
&= \Psi g(\mathcal{F}\gamma) \\
&= (\mathcal{F}(\Psi g))(\gamma) \\
\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g &= \mathcal{F}(\Psi g)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Beispiel. $\Psi = 1, g = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}1 \circ \mathcal{F}1 &= \mathcal{F}1 \\
\sqrt{2\pi}\delta \circ \sqrt{2\pi}\delta &= \sqrt{2\pi}\delta \\
\delta \circ \delta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta
\end{aligned}$$

Beispiel. $\psi = 1, g = \mathcal{F}^{-1}h$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\delta \circ h &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}h) = h \\
\delta \circ h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h
\end{aligned}$$

In äquivalenter Notation *schreibt sich*

$$\delta \circ \delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta$$

als

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\delta(x-x')dx' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(x) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\delta(x-x')dx' &= \delta(x)
\end{aligned}$$

so als ob wir

$$\delta(x-x')|_{x'=0} = \delta(x)$$

verwendet hätten, ähnlich

$$\begin{aligned}
\delta \circ h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')h(x-x')dx' &= h(x)
\end{aligned}$$

so als ob wir

$$h(x-x')|_{x'=0} = h(x)$$

verwendet hätten.

Behauptung.

$$(\mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}g)' = (\mathcal{F}\psi)' \circ \mathcal{F}g = \mathcal{F}\psi \circ (\mathcal{F}g)'$$

Beweis. Wir benutzen Gleichungen (4.5) und (4.3)

$$(\mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}g)' = (\mathcal{F}(\psi g))' = \mathcal{F}(-ix(\psi g))$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-ix(\psi g)) &= \mathcal{F}((-ix\psi)g) \\ &= \mathcal{F}(-ix\psi) \circ \mathcal{F}g \\ &= (\mathcal{F}\psi)' \circ \mathcal{F}g \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-ix(\psi g)) &= \mathcal{F}(\psi(-ixg)) \\ &= \mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}(-ixg) \\ &= \mathcal{F}\psi \circ (\mathcal{F}g)' \end{aligned}$$

□

Korollar: $(\mathcal{F}\psi \circ g)' = (\mathcal{F}\psi)' \circ g = \mathcal{F}\psi \circ g'$

4.6 Temperierte Distributionen im \mathbb{R}^n

Definition. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $f(\mathbf{x}) \in S$, wenn f beliebig partielle Ableitungen besitzt und für $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^k \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| = 0 \quad \forall k, \forall p_1 + p_2 + \dots + p_n \in \mathbb{N}$$

Beispiel. Bsp: $e^{-r^2} \in S$, $x_1^2 e^{-r^2} \in S$, $e^{-x_1^2} \notin S$ (fällt nicht ab, wenn $x_1 = 0$, $r \rightarrow \infty$)

Definition (Temperierte Distribution). Mittels regulärer Folgen und Testfunktionen aus S kann direkt für \mathbb{R}^n verallgemeinert werden.

Es reicht, für $\gamma(\mathbf{x}) \in S$ die spezielle Wahl $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma_1(x_1) + \gamma_2(x_2) + \dots + \gamma_n(x_n)$ wo alle $\gamma_i(x_i) \in S$, $x_i \in \mathbb{R}$ Rechenregeln im \mathbb{R}^n analog zu vorher.

Definition. Direktes Produkt von temperierten Distributionen.

Sei g_1, g_2 temperierte Distribution auf \mathbb{R}^n

Sei f_1, f_2 Testfunktion auf \mathbb{R}^n

$$(g_1 \circ g_2)(\gamma_1 \gamma_2) = g_1(\gamma_1) g_2(\gamma_2)$$

Beispiel. δ^3 Funktion im \mathbb{R}^3

$$\delta^3(\gamma) = \delta_1(\gamma_1) \delta_2(\gamma_2) \delta_3(\gamma_3)$$

Bemerkung. $f(x)$ ist selbst Distribution

$$f(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x})d^n x$$

wenn $\exists \nu \in \mathbb{R}$, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\mathbf{x})|d^n x}{(1+r^2)^\nu}$

Beispiel. $x \in \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}$ ist selbst Distribution ($\nu = 2$):

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \sin \vartheta}_{4\pi} \int_0^{\infty} r^2 dr \frac{1}{r} \frac{1}{(1+r^2)^2} = 4\pi \int_0^{\infty} dr \frac{r}{(1+r^2)^2} < \infty$$

Wichtige Formel: Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3 \quad (4.9)$$

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ ist Distribution und gleichzeitig selbst Funktion im \mathbb{R}^3

Beweis.

$$\left(\Delta \frac{1}{r}\right)(\gamma) = \frac{1}{r}(\Delta\gamma) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} r^2 dr \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \gamma$$

γ und alle Ableitungen stetig, also z.B. periodisch in $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

auch

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) = \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \Big|_0^{\pi} = 0$$

sodass

$$\begin{aligned} \left(\Delta \frac{1}{r}\right)(\gamma) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dr \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \gamma \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left[\frac{1}{r} r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dr \left(-\frac{1}{r}\right) r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta [0 - \gamma(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \Big|_{r=0}] \\ &= -4\pi\gamma(0, 0, 0) \\ &= -4\pi\delta^3(\gamma) \end{aligned}$$

□

4.7 Greensfunktionsmethode

Erlaubt spezielle Lösungen von inhomogenen, linearen gewöhnlichen, aber auch insbesondere von inhomogenen, linearen, partiellen DGL zu finden.

$$Dy = f$$

D ... linearer Differentialoperator
 y ... gesuchte Funktion
 f ... inhomogener Term der DGL

Beispiel.

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, D = \Delta$$

$$\Delta y = e^{-\mathbf{x}^2}$$

Definition. Eine temperierte Distribution G , welche die DGL

$$DG = \delta$$

löst, heißt Greenfunktion der DGL $Dy = f$

Satz. Wenn $f = \mathcal{F}\Psi$, wo Ψ schwach wachsende Funktion ist, dann gilt:

$$y_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi} G \circ f$$

Beweis. Wiederholtes Anwenden der Ableitungsformel für Faltung ergibt:

$$Dy_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi}(DG) \circ f = \sqrt{2\pi}\delta \circ f = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f = f$$

□

Beispiel.

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Delta y = f, \quad \in S$$

wissen schon: $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^3$

$$\Rightarrow G = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

$$\Rightarrow y_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi} \left(-\frac{1}{4\pi} \right) \frac{1}{|\mathbf{x}|} \circ f$$

f und $\frac{1}{|\mathbf{x}'|}$ sind selbst wieder Funktionen, kann daher integrieren:

$$y_{\text{spez}} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}') \quad (4.10)$$

4.8 Nichtlineare Variablentransformation der δ -Funktion

Satz. Wenn $f(x)$ n Nullstellen $x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}$ hat, stetig differenzierbar und monoton in Umgebungen der Nullstellen x_{0_n} ist, weiters $f'(x_{0_i}) \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ dann gilt

$$\delta(f)(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_{0_i})|} \gamma(x_{0_i})$$

Beispiel.

$$\delta(x^2 - a^2)(\gamma) =$$

$$f(x) = x^2 - a^2, \quad x_{0_1} = -a, \quad x_{0_2} = a$$

$$f'(x) = 2x, \quad f'(a) \neq 0, \quad f'(-a) \neq 0$$

$$\delta(x^2 - a^2)(\gamma) = \frac{1}{2|a|} [\gamma(a) + \gamma(-a)]$$

Beweis. (für eine Nullstelle x_0)

$$(\delta(f(x)), \gamma(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-(f(x))^2 n} \gamma(x) dx$$

Sattelpunktmethode

sei $F(x) \geq 0, \quad \gamma \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(x)n} \gamma(x) dx \approx \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-F(x_0)n} \gamma(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 F''(x_0)n} dx$$

wobei x_0 Extremwert von F , d.h. $F'(x_0) = 0$ und Taylorreihenentwicklung verwendet wird

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \underbrace{F'(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 F''(x_0) + \dots$$

Hier:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-(f(x))^2 n} \gamma(x) dx$$

$$F = f^2$$

$$F' = 2ff'$$

$$F'' = 2(f')^2 + 2ff''$$

Min. x_0 von $F \equiv$ Nullstelle von f

$$\begin{aligned}F'(x_0) &= 0 \\f(x_0) &= 0 \\ \Rightarrow F(x_0) &= f(x_0)^2 = 0 \\F'(x_0) &= 0 \\F''(x_0) &= 2(f'(x_0))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(f)(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(x_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 2(f'(x_0))^2 n} dx}_{\sqrt{\frac{n}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{|f'(x_0)|}} \\ &= \frac{1}{|f'(x_0)|} \gamma(x_0)\end{aligned}$$

□