Kapitel 3

Spezielle Funktionen

Funktionen wie die *Legendre-Polynome* (3.1), die *Besselfunktion* (3.2), die *Hermite-Polynome* (3.3) oder die *Laguerre-Polynome* (3.4) hängen mit den Lösungen diverser Randwertprobleme zusammen, sowie mit den Lösugnen partieller Differentialgleichungen.

3.1 Legendre-Polynome

Definition. Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome ist[1]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

wenn $|1-2xt+t^2|<1$, ergibt sich nach Taylor-Entwicklung und unter Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned}(1-2xt+t^2)^{-1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ l\end{pmatrix}\left(-2xt+t^2\right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ l\end{pmatrix}\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix}l\\ k\end{pmatrix}t^{2k}(-2xt)^{l-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\ k\end{pmatrix}t^{l+k}(-2x)^{l-k} \qquad (3.1)\end{aligned}$$

wenn Doppelsumme absolut konvergent ist, also wenn $|t^2|<1$, $|2x|<1$, können wir umordnen

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l$$

16.03

Beispiel.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}=1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2+\dots$$

[1] Das ist ein wenig verwirrend, aber man gewöhnt sich daran
Tipp: x ist immer das, woraus die Polynome werden

wo $\varepsilon = -2xt + t^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + xt + \frac{1}{2}(3x^2-1)t^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

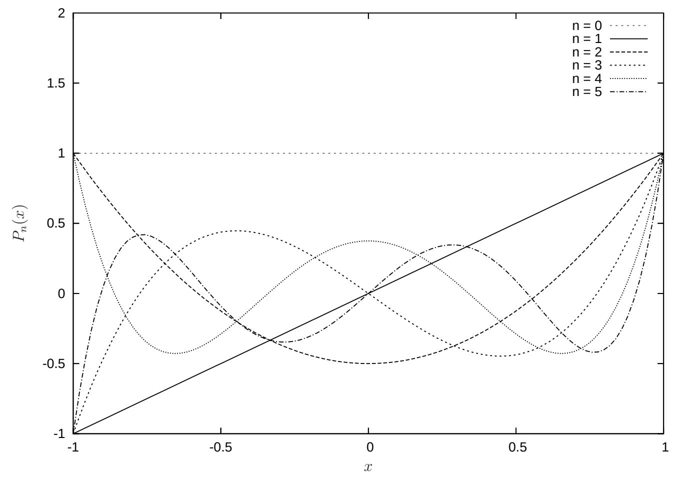

Abbildung 3.1: Die ersten sechs Legendre-Polynome P_n

Beispiel. Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$, $R = |\boldsymbol{x}'| > r = |\boldsymbol{x}|$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\alpha}} \\ &= \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2(\frac{r}{R})\cos\alpha+(\frac{r}{R})^2}} \\ &= \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\alpha)\left(\frac{r}{R}\right)^l \end{aligned} \tag{3.2}$$

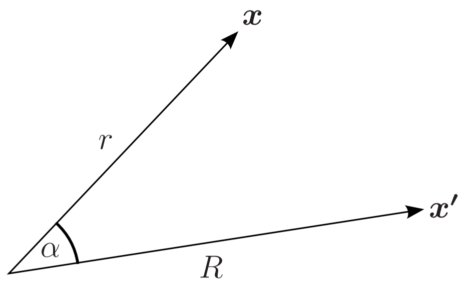

Abbildung 3.2: Additionstheorem der Legendre-Polynome

Wir führen nun den neuen Summationsindex $n = l + k$ in 3.1 ein:

$$\begin{aligned}
(1-2xt+t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_{max}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} t^{l+k}(-2xt)^{l-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_{\max}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} (-2)^{n-2k}x^{n-2k}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n
\end{aligned}$$

Da $k \leq l = n-k$, gilt

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} (-2)^{n-2k}x^{n-2k}$$

mit

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

Wir betrachten die einzelnen Faktoren:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n-k \end{pmatrix} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+k+1\right)}_{(n-k)\text{ Faktoren}}/(n-k)!$$

$$\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n-k)!}{(n-2k)!\,k!}$$

$$(-2)^{n-2k} = \frac{(-2)^{n-k}2^{n-k}(-1)^k}{2^n}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} (-2)^{n-2k} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-2k-1)\cdot(2n-2k)\cdot(2n-2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(n-k)!\,(n-2k)!\,k!\,2^n}(-1)^k$$

und daraus schließlich die

3.1.1 Explizite Formel für die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{k_{\max}} (-1)^k \frac{(2n-2k)!\,x^{n-2k}}{(n-k)!\,(n-2k)!\,k!\,2^n}$$

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

3.1.2 Formel von Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{3.3}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^k x^{2(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{k_{\max}}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{k_{\max}}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}
\end{aligned}
$$

mit

$$
k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}
$$

□

3.1.3 Integraldarstellung der P_n

$$
P_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z
$$

$$
C \quad \ldots \quad \text{geschlossener Weg um } x
$$

Beweis mittels Cauchy'scher Formel für Ableitungen

$$
f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-x)^{n+1}}
$$

wo $f(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(z^2-1\right)^n$ gesetzt wird.

3.1.4 P_n und DGL

Es gilt

$$
(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{3.4}
$$

Beweis. Sei γ ein geschlossener Weg um x.

$$
\begin{aligned}
P_n'(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n(n+1)}{2^n(z-x)^{n+2}}\mathrm{d}z \\
P_n''(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n(n+1)(n+2)}{2^n(z-x)^{n+3}}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{n+1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n\,\mathrm{d}z}{2^n(z-x)^{n+3}}\left[(1-x^2)(n+2)-2x(z-x)+n(z-x)^2\right] &= \frac{n+1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n\,\mathrm{d}z}{2^n(z-x)^{n+3}}\left[2(n+1)z(z-x)-(n+2)(z^2 -\right. \\
&= \frac{n+1}{2\pi\mathrm{i}2^n}\int_\gamma \mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}}\right] = 0
\end{aligned}
$$

$\square$

3.1.5 Normierung, Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{3.5}$$

Beweis. Wir multiplizieren die DGL für die Legendre-Polynome (3.4) P_n mit P_m und jene für P_m mit P_n; dann bilden wir die Differenz der so erhaltenen Produkte:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x}\right\}\right]P_m - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}x}\right\}\right]P_n + [n(n+1)-m(m+1)]P_nP_m &= 0\\
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)\left(P_m\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} - P_n\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}x}\right)\right] + [n(n+1)-m(m+1)]P_nP_m &= 0\\
\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} - P_n\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}x}\right)\right]_{-1}^{1} + [n(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde zwischen -1 und 1 integriert; der linke Term verschwindet dadurch offensichtlich. Damit nun

$$[n(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

muss, falls $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

Für $m = n$ gilt unter Verwendung der Formel von Rodrigues (3.3) und weiters durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(z^2-1\right)^n\right)\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(z^2-1\right)^n\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(z^2-1\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(z^2-1\right)^n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(z^2-1\right)^n\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(z^2-1\right)^n\mathrm{d}x\right]\\
&= \ldots = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(z^2-1\right)^n\mathrm{d}x\\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^n\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned}
\left(z^2-1\right)^n &= z^{2n} - z^{2(n-1)} + \ldots + (-1)^n\\
\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(z^2-1\right)^n &= (2n)!
\end{aligned}$$

Weiters gilt, wieder unter Verwendung partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (z-1)^n (z+1)^n \,\mathrm{d}x &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (z-1)^{n-1} (z+1)^{n+1} \,\mathrm{d}x = \dots \\
&= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (z+1)^{2n-1} \,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left. \frac{(z+1)^{2n+1}}{2n+1} \right|_{-1}^{1} \\
&= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 3.6 ein, so ergibt sich schließlich

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

Damit stellen die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein *orthogonales, normiertes Funktionensystem* dar.

□

Bemerkung (Entwicklung von Polynomen nach Legendre-Polynomen). Sei $p_n(z)$ ein Polynom n-ter Ordnung in z. Dann lässt sich $p_n(z)$ durch die Legendre-Polynome $P_0(z), \dots, P_n(z)$ ausdrücken:

$$p_n(z) = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + \ldots + a_n P_n(z) \tag{3.7}$$

Für die Koeffizienten a_m folgt durch Integration von Gleichung 3.7 und Anwendung von Gleichung 3.5

$$\int_{-1}^{1} p_n(z) P_m(z) \mathrm{d}z = \frac{2}{2m+1} a_m$$

Bemerkung (Entwicklung von Funktionen nach Legendre-Polynomen). Sätze über Konvergenz (ohne Beweis) ähnlich wie bei Fourierreihenentwicklung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \\
a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Z. B. gleichmäßige Konvergenz für auf $[-1, 1]$ stetige, stetig differenzierbare Funktion.

Definition (Assoziierte Legendre-Funktionen)**.**

$$P_n^m(x) := \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

Beispiel.

$$P_1^1(z) = (1 - z^2)^{1/2}$$

Beispiel. Die assoziierten Legendre-Funktionen P_n^m bilden eine Orthonomalbasis (ohne Beweis). Es gilt z. B.

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(z) P_l^m(z) \mathrm{d}z = \delta_{nl} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+l)!}{(n-l)!}$$

Bemerkung. $P_n^m(x) = 0$ wenn $m > n$

Differentialgleichung Assoziierte Legendre-Funktionen P_l^m

$$\left((1-x^2){P'}_l^m\right)' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P_l^m = 0 \tag{3.8}$$

3.2 Besselfunktion $J_n(x)$

Erzeugende Funktion:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \quad t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Entwicklung in Laurentreihe:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

zur Erinnerung: $f(z)$ singulär bei $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w$$

$$\gamma \quad \ldots \quad \text{geschlossener Weg um } 0$$

daraus folgt:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} \mathrm{d}w$$

substituieren $w = \frac{2z}{x}$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_\gamma \mathrm{e}^{z-\frac{x^2}{4z}} z^{-n-1} \mathrm{d}z$$

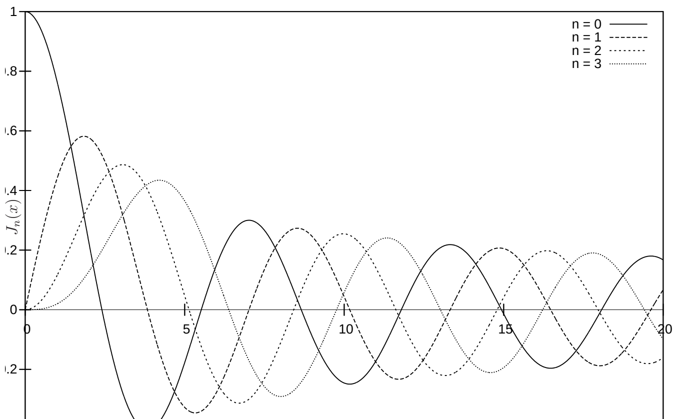

Abbildung 3.3: Die ersten drei Bessel-Funktionen J_n

Es heben sich alle Potenzen weg, außer jene, wo $\frac{1}{z}$ stehen bleibt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4z}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^{2r}}{(4z)^r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{d}z\, z^{-n-r+k-1}}_{\text{wenn } n \geq 0\text{: } \delta_{k,\, n+r}} \\
J_n(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \qquad \text{konvergiert } \forall x
\end{aligned}
$$

(siehe dazu auch Übungsbeispiele für $n < 0$: $J_n(x) = (-1)^n J_{|n|}(x)$)

Behauptung. *J_n erfüllen die Bessel'sche DGL*

$$
J_n'' + \frac{1}{x} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0
$$

Beweis: analog zu Legendre-Polynomen mittels Integralformel für $J_n(x)$ (siehe auch hier Übungen; man verwendet $\int_\gamma \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathrm{e}^{z-\frac{x^2}{4z}} z^{-n-1}\right) = 0$).

Auch die Besselfunktionen bilden eine Orthonormalbasis.

3.3 Hermite-Polynome

Definition.

$$
\mathrm{e}^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n
$$

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t^2+2tx} &= 1 - t^2 + 2tx + \frac{1}{2} 4t^2x^2 + \dots \\
&= 1 + 2xt + \frac{1}{2}(4x^2 - 2)t^2 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 1 \\
H_1 &= 2x \\
H_2 &= 4x^2 - 2
\end{aligned}
$$

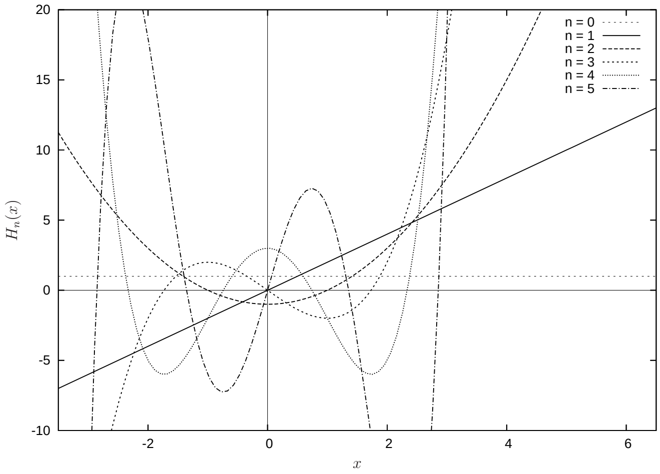

Abbildung 3.4: Die ersten sechs Hermite-Polynome H_n

Behauptung.

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} &= (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-(x-t)^2} \right|_{t=0} = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \mathrm{e}^{-(x-t)^2} \right|_{t=0} (-1)^n \\
&= \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(\mathrm{e}^{-t^2+2tx} \right) \right|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} t^k \right|_{t=0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \delta_{nk} k! = H_n(x)
\end{aligned}$$

□

3.3.1 Integraldarstellung

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

γ ... geschlossener Weg um 0

3.3.2 Differentialgleichung

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

(ohne Beweis; analog zu Legendre-Polynome, Besselfunktionen)

3.4 Laguerre-Polynome $L_n(x)$

3.4.1 Erzeugende Funktion

$$\frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \quad |t| < 1$$

Die $L_n(x)$ sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe.

3.4.2 Integraldarstellung

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{-x\frac{z}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$C\ldots$ geschlossener Weg um 0 ohne 1 zu umschließen

Behauptung.

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n \mathrm{e}^{-x})$$

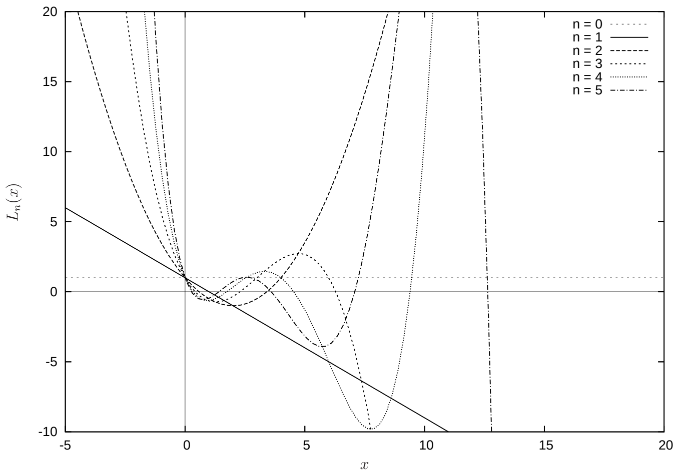

Abbildung 3.5: Die ersten sechs Laguerre-Polynome L_n

Beweis. Einsetzen in Integralformel

$$z = \frac{w-x}{w} \qquad \text{bzw.} \qquad w = \frac{x}{1-z}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}w\, w - (w-x)\mathrm{d}w}{w^2} = \frac{x}{w^2}\mathrm{d}w$$

$$
\begin{aligned}
L_n(x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\mathrm{e}^{-x\frac{w-x}{w}\frac{1}{1-\frac{w-x}{w}}}}{(1-\frac{w-x}{w})(\frac{w-x}{w^{n+1}})^{n+1}} \frac{x\,\mathrm{d}w}{w^2} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^x \int_\gamma \mathrm{e}^{-w+x} w^{1-2+n+1} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} \mathrm{d}w \\
&= \mathrm{e}^x \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma w^n \mathrm{e}^{-w} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} \mathrm{d}w \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n \mathrm{e}^{-x})
\end{aligned}
$$

□

3.4.3 Assoziierte Laguerre-Polynome

$$
L_n^m(x) := (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} L_{n+m}(x)
$$

3.4.4 Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n &= 0 \\
xL_n^{m\prime\prime} + (1+m-x)L_n^{m\prime} + nL_n^m &= 0
\end{aligned}
$$

(Beweis mittels Integraldarstellung)

3.5 Kugelfunktionen $Y_l^{lm}(\vartheta, \varphi)$

Definition.

$$
Y_l^m(\vartheta,\varphi) = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} & m \geq 0 \\ (-1)^m \left(Y_l^{-m}(\vartheta,\varphi)\right)^* & m < 0 \end{cases}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
l &= 0, 1, 2 \\
m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l
\end{aligned}
$$

$$
\vartheta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]
$$

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{P_0^0(\cos\vartheta)}_{1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \mathrm{e}^{\pm i\varphi}
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Die Kugelfunktionen sind bezüglich des vollständigen Orthonormalsystems der (assoziierten) Legendrepolynome definiert.

Sie bilden daher selbst ein vollständiges ONS für Funktionen, die auf der Einheitskugel definiert sind (d.h. von (ϑ, φ) abhängen).

Insbesondere kann man zeigen, dass:

$$\int_0^\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, Y^{*m}_{\;n}(\vartheta,\varphi) Y^{m'}_{n'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{nn'}\delta_{mm'} \tag{3.9}$$

Es gilt das wichtige Additionstheorem:

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\vartheta,\varphi) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{3.10}$$

wo α der Winkel zwischen (r,ϑ,φ) und (R,θ,ϕ) ist

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \sin\vartheta\sin\theta(\cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi) + \cos\vartheta\cos\theta \\
&= \sin\vartheta\sin\theta\cos(\varphi-\phi) + \cos\vartheta\cos\theta
\end{aligned}$$

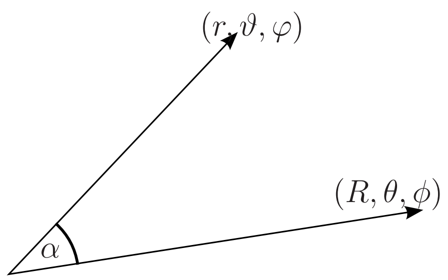

Abbildung 3.6: Additionstheorem der Kugelfunktionen

Beweis. 1. $\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\vartheta,\varphi) Y_l^m(\theta,\phi)$
ist unter Drehungen des Koordinatensystems invariant (Darstellungstheoreme, Drehgruppe, Übungsbeispiele)

2. wählen $\vartheta = 0$, also $\cos\alpha = \cos\theta$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(0,\varphi) Y_l^m(\alpha,\phi) &= \sum_{m=-l}^{l} \frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} P_l^m(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\
&= \sum_{m=-l}^{l} \frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{m0} P_l^m(\cos\alpha) \\
&= \frac{2l+1}{4\pi} P_l^0(\cos\alpha) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\alpha)
\end{aligned}$$

□

3.6 Gammafunktion $\Gamma(x)$

Wir betrachten zunächst für $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

differenzieren n-mal nach α

$$\int_0^\infty (-t)^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{\alpha^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

multiplizieren mit $(-1)^n$ und setzen

$$\alpha = 1: \quad \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n! \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Definition.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n! \\
\Gamma(1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0! \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\mathrm{d}\tau \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

mit $t = \frac{\tau^2}{2}$, $\mathrm{d}t = \tau\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t^{1/2}\mathrm{d}\tau$.

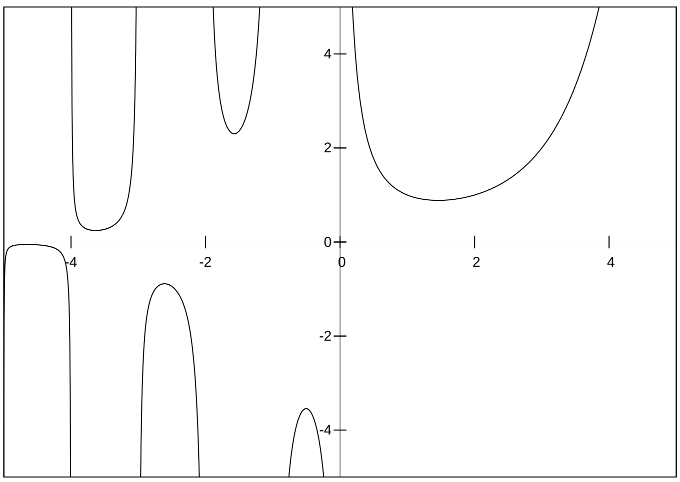

Abbildung 3.7: Die Gammafunktion $\Gamma(x)$

Es gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \underbrace{t^x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v'}\mathrm{d}t &= \underbrace{t^x(-\mathrm{e}^{-t})\big|_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty \mathrm{d}t\; xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t}) \\
&= x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

Definition. Wenn $x \in \mathbb{R}^-\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\}$ können wir $\Gamma(x) := \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ definieren.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Bemerkung. Für $x \in \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ ist $\Gamma(x)$ singulär!

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\Gamma(\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Gamma(1+\epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\Gamma(1+\epsilon)}_{1} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$