# Kapitel 2

# Fourierreihen und -transformation

## 2.1 Fourierreihen

1822 postulierte Fourier (ohne stichhaltige Beweise):

„Jede beliebige Funktion $f(x)$ mit Periode $L$, d. h. $f(x) = f(x+L)$, lässt sich in eine Reihe der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

entwickeln, wo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} \mathrm{d}x \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} \mathrm{d}x \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Analog gilt (siehe Übungen)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n}{L} x}$$

wo

$$c_n = \int_0^L f(x) \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n}{L} x} \mathrm{d}x$$

Beweise zu Fouriers Postulat – unter welchen Voraussetzungen die Reihe in welchem Sinne konvergiert:

Mitte 19. Jhd.: Dirichlet, Riemann

Anfang 20.Jhd.: Lebesgue, Riesz, Fischer

**Beispiel.**

$$f(x) = \left( \frac{\pi - x}{2} \right)^2 \qquad x \in [0, 2\pi]$$

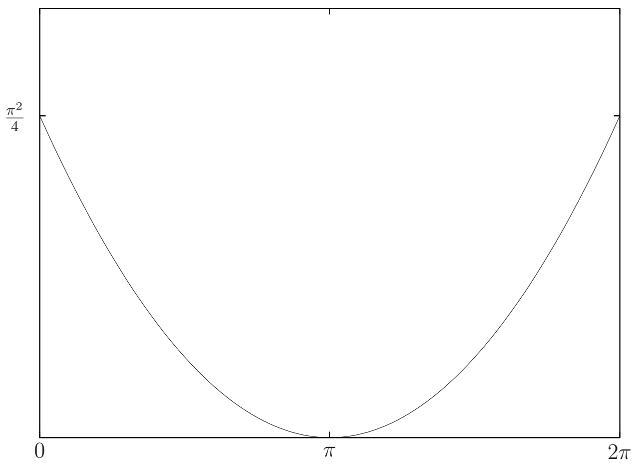


Abbildung 2.1: $f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$

Offensichtlich gilt $f(0) = f(2\pi) = \frac{\pi^2}{4}$

Für $n \neq 0$ ist

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \cos nx \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{n^2}$$
$$b_n = \ldots = 0$$

und

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit

$$f(x) \overset{?!?}{=} \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Wollen folgenden Satz beweisen:

**Satz.** *Sei $f(x)$ L-periodisch, stetig und stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe $f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ gleichmäßig gegen $f$ (o. B. d. A. $L = 1$).*

Beweis in zwei Schritten:

1. Fourierreihe konvergiert gleichmäßig
2. Für festes $x \in [0, 1]$ konvergiert Fourierreihe punktweise gegen $f$.

**Einige Hilfsüberlegungen:**

$$\int_c^{c+1} f(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

**wo** $c \in \mathbb{R}$ **und** $f(x) = f(x+1)$**.**

$$\int_c^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{c+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^c f(y+1)\mathrm{d}x = \int_0^c f(y)\mathrm{d}y = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x$$

wo $y = x - 1$ gesetzt wurde.

**Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

*Beweis.* Im folgenden ist $\bar{c_n}$ das komplex Konjugierte von $c_n$.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 \mathrm{d}x \left(f - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c_n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nx}\right)\left(f - \sum_{m=-N}^{N} c_m \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} mx}\right) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x f(x)^2 - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c_n} \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nx} \mathrm{d}x - \sum_{m=-N}^{N} c_m \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nx} \mathrm{d}x + \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \bar{c_n} \bar{c_m} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(n-
\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x f(x)^2 - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c_n} c_n - \sum_{m=-N}^{N} c_m \bar{c_m} + \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \bar{c_n} \bar{c_m} \delta_{nm}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x \qquad \forall N$$

□

**Riemann-Lebesgue Lemma**

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0 \tag{2.2}$$

*Beweis.* Da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x < \infty$$

muss $c_n$ Nullfolge sein!

□

**Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2} \tag{2.3}$$

Nun wollen wir zeigen, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert , d. h. für alle $\epsilon$ existiert ein $N_0$ unabhängig von $x \in [0,1]$, sodass $\forall N', N > N_0$, wo $N' < N$

$$|f_N(x) - f_{N'}(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [0,1]$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir

$$
\begin{aligned}
|f_N(x) - f_{N'}(x)| &= \left|\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx} - \left(\sum_{n=-N'}^{-N-1} + \sum_{n=-N}^{N} + \sum_{n=N+1}^{N'}\right) c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}\right| \\
&= \left|\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}\right| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |c_n| \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

□

Da laut Voraussetzung $f$ stetig differenzierbar ist, können wir die Fourierkoeffizienten $d_n := \int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x$ von $f'$ betrachten. Es gilt die Ableitungsformel

$$d_n = 2\pi i n c_n \tag{2.5}$$

*Beweis.* Partielle Integration ergibt

$$d_n = \int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\big|_0^1 - (-2\pi i n)\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mathrm{d}x = 0 + 2\pi i n c_n$$

wobei der erste Term aufgrund der Periodizität verschwindet .

□

Nun setzen wir die Ableitungsformel (2.5) in (2.4) ein, wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.3) an und erhalten die erste Zeile der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
|f_N(x) - f_{N'}(x)| &\leq \sum_{N+1\leq|n|\leq N'} \left|\frac{1}{2\pi n} d_n\right| \leq \sqrt{\sum_{N+1\leq|n|\leq N'} \left|\frac{1}{2\pi n}\right|^2} \sqrt{\sum_{N+1\leq|n|\leq N'} |d_n|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{N+1\leq|n|} \left|\frac{1}{2\pi n}\right|^2} \sqrt{\sum_{N+1\leq|n|} |d_n|^2} \leq \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x} \\
&\leq \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{N}} \cdot \mathrm{const} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Weiters haben wir in der zweiten Zeile die Bessel'sche Ungleichung (2.1) für $f'(x)$ sowie die folgende Überlegung verwendet:

$$\sum_{N+1\leq|n|} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\left.\frac{2}{x-1}\right|_{N+1}^{\infty} = \frac{2}{N}$$

Wir zeigen nun, dass für festes $x \in [0,1]$

$$\lim_{N\to\infty} (f_N(x) - f(x)) = 0$$

**Definition.** Dirichlet-Klassen

$$D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} \mathrm{e}^{2\pi i n x}$$

*Bemerkung.*

$$D_N(x) = D_N(x+1)$$

Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} 1 = 2N+1$$

Nun sei $x \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(2N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(N+1)x}-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}-1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2N+1)x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(2N+1)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}} = \frac{\sin\pi(2N+1)x}{\sin\pi x} \end{aligned}$$

und mit dem Satz von L'Hospital

$$D_N(x) = \frac{\sin\pi(2N+1)x}{\sin\pi x} \qquad \forall x\in[0,1]$$

Weiters

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{|n|\le N} c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} = \sum_{|n|\le N}\int_0^1 \mathrm{d}y f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}y f(y) D_N(x-y) = \int_{-x}^{1-x}\mathrm{d}y' f(x+y')D_N(y') = \int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}y f(x+y)D_N(y) \end{aligned}$$

wo $y' = y - x$. In der letzten Gleichung wurde die Periodizität des Integranden benutzt ($y' \to y'+1$).

$$\begin{aligned} f_N(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}y\{f(x+y)-f(x)\}D_N(y) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}y\frac{f(x+y)-f(x)}{\sin\pi y}\sin\pi(2N+1)y \end{aligned}$$

Dabei ist der erste Faktor des Integranden stetig in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.
Schließlich gilt, unter Benutzung des Riemann-Lebesgue-Lemmas (2.2)

$$\lim_{N\to\infty}(f_N(x)-f(x)) = 0$$

Weitere Verallgemeinerung:

**Satz.** *Sei $f$ stetig bis auf* endlich viele Unstetigkeitsstellen*, die nur Sprungstellen sein sollen. Bis auf die Sprungstellenn und weitere* endlich viele Knicke *sei $f$ stetig differenzierbar und es sollen überall Links- und Rechtsableitungen existieren.*
*Dann*

1. *konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das keine* Sprungstelle *enthält.*
2. *konvergiert $f_n(x)$ um die Sprungstelle $x_0$ gegen*

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$$

*den Mittelwert von* $\lim_{x\searrow x_0} f(x) =: f(x_0+0)$ *und* $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) =: f(x_0-0)$.

*Bemerkung.* 1. Abgesehen von Knickstellen schon bewiesen; bisheriger Beweis bleibt gültig auch für Knickstellen, da die Bessel'sche Ungleichung und das Riemann-Lebesgue-Lemma auch für diesen Fall gültig sind (ohne Beweis, siehe später).

**Gibbs-Phänomen (ohne Beweis)** In der Nähe einer Sprungstelle wird $f(x)$ von den Partialsummen $f_N(x)$ um ca. $8,9\,\%$ der Sprungweite übertroffen, $x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$.

**Beispiel.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f_N(x_{\max}) - f(x_{\max}) = 0.179\ldots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$
$$x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

## 2.2 Fourier-Transformation

Für die stetige und stetig differenzierbare, $L$-periodische Funktion $f(n)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-L/2}^{L/2} f(y) \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L} y} \mathrm{d}y \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L} y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L} y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{L} y} \end{aligned}$$

Intuitiv: wenn $L \to \infty$

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{2\pi n}{L} \\ \mathrm{d}k &\approx \frac{2\pi}{L} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \end{aligned}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

In welchem Sinn gilt nun die Näherung; und für welche $f(x)$ existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$?

**Definition.** Sei $S$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass $f$ und alle ihre Ableitungen schneller als jede Potenz bei $|x| \to \infty$ gegen Null geht; das bedeutet mathematisch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p f^{(q)}(x) \right| < \infty \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

oder: es existiert ein $x_0 > 0$, sodass für $|x| > x_0$

$$\left| x^p f^{(q)}(x) \right| \leq \text{const} \qquad p, q \in \mathbb{N}$$

oder

$$\lim_{|x| \to \infty} \left| x^p f^{(q)}(x) \right| = 0 \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

**Beispiel.**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x^L} &\in S \\
\frac{1}{1+x^2} &\notin S \\
\mathrm{e}^{-x} &\notin S \\
\mathrm{e}^{-|x|} &\notin S
\end{aligned}
$$

*Bemerkung.*

$$
\begin{aligned}
f \in S &\Rightarrow f^{(n)} \in S \\
f \in S &\Rightarrow p(x)f(x) \in S
\end{aligned}
$$

wo $p(x)$ Polynom.

**Definition** (Fouriertransformation)**.** Sei $f \in S$. Dann lauten die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}f$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{R} \\
(\mathcal{F}^{-1}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \qquad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

**Satz.** *Wenn $f \in S$, dann existiert $\mathcal{F}f$.*

*Beweis.*

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{F}f)(k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{0\leq|x|\leq x_0} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{|x|>x_o} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x|>x_o} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{2c}{x_0} < \infty
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde benutzt, dass der linke Term wegen der Stetigkeit von $f$ endlich ist. Weiters kann man $x_0$ so wählen, dass für $|x| > x_0$ gilt $|f(x)| \leq \frac{c}{x^2}$.

□

*Bemerkung.* $(\mathcal{F}f)(k)$ konvergiert für $f \in S$ absolut (ist dabei $k$-unabhängig); und ist somit gleichmäßig konvergent in $k$.

**Beispiel.**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2} \\
\Rightarrow (\mathcal{F}f)(k) &= \mathrm{e}^{-k^2/2}
\end{aligned}
$$

Siehe dazu auch die Übungen!

**Definition** (Gleichmäßige Konvergenz)**.**

$$
\int_0^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x
$$

*konvergiert gleichmäßig* in $y \in [y_o, y_1]$ falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N$ gibt, sodass für alle $N_1, N_2 > N$, $y \in [y_o, y_1]$ gilt

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x,y) \mathrm{d}x \right| < \epsilon$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_a^\infty f(x,y)\mathrm{d}x \qquad \text{stetig} \\ g'(y) &= \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

nur wenn $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$ gleichmäßig konvergent in $y$.

### 2.2.1 Ableitungsformeln

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f')(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\big|_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \right] \\ &= \mathrm{i}k(\mathcal{F}f)(k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei wurde partiell integriert (das ist erlaubt, da $(\mathcal{F}f')(k)$ gleichmäßig konvergent in $k$ ist). Der erste Term fällt dann weg, da $f(x) \in S$.

Iteration führt zu höheren Ableitungen:

$$\left(\mathcal{F}f^{(p)}\right)(k) = (\mathrm{i}k)^p (\mathcal{F}f)(k)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)'(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\ &= (\mathcal{F}(-\mathrm{i}xf))(k) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Hier ist mit $f(x) \in S$ auch $\mathrm{i}xf(x) \in S$. Da $(\mathcal{F}(-\mathrm{i}xf))(k)$ gleichmäßig konvergent in $k$, durfte unter dem Integralzeichen differenziert werden.

Iteration:

$$(\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (\mathcal{F}(-\mathrm{i}x)^{(q)}f)(k)$$

Insgesamt

$$(-\mathrm{i}x)^p(\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (\mathrm{i}k)^p \mathcal{F}\left((-\mathrm{i}x)^q f\right)(k) = \mathcal{F}\left(\left((-\mathrm{i}x)^q f\right)^{(p)}\right)(k) \qquad p, q \in \mathbb{N}$$

**Satz.** *Fourierreihe bildet $S$ auf sich selbst ab, d. h. wenn $f \in S$, dann auch $\mathcal{F}f \in S$. (siehe Übungen)*

**Satz** (Plancherel-Gleichung)**.** *(ohne Beweis.) Für $f \in S$ gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(k)|^2 \mathrm{d}k$$

**Satz** (Faltungstheorem)**.** *Für $f, g \in S$ gilt*

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g \tag{2.8}$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \tag{2.9}$$

*wo*

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')\mathrm{d}x' = (g \circ f)(x) \tag{2.10}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'} f(x')\mathrm{d}x' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky'} g(y')\mathrm{d}y' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'+y')} f(x')g(y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} (g \circ f)(x) = \mathcal{F}((g \circ f))(k) \\
&= \mathcal{F}((f \circ g))(k)
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir $x = x' + y'$, $y = y'$ und $\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ verwendet.

□

### 2.2.2 Anwendungsbeispiel der Fouriertransformation

Auffinden spezieller Lösungen von Differentialgleichungen, z. B.

$$y'' - y = f$$

bei vorgegebenem $f \in S$.
Fouriertransformation der Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}y'' - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\
-k^2\mathcal{F}y - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\
-(1 + k^2)\mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\
\mathcal{F}y &= -\frac{1}{1+k^2}\mathcal{F}f
\end{aligned}$$

Rücktransfomation und Anwendung des Faltungstheorems 2.9 ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}y = y &= -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \\
y(x) &= -\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ f\right)(x) \\
y(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x-x'|} f(x')\mathrm{d}x'
\end{aligned}$$

da $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-|x|}$ (siehe Übungen).

*Bemerkung.* Vgl. frühere Formel für spezielle Lösungen:

Homogene Lösung $y'' - y = 0$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \mathrm{e}^x \\
y_2 &= \mathrm{e}^{-x} \\
W &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -2 \\
y_{\text{spez}}(x) &= -\mathrm{e}^x \int_{c_1}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-x'} f(x')}{-2} \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x} \int_{c_1}^{x} \frac{\mathrm{e}^{x'} f(x')}{-2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

hängt mit obiger Lösung zusammen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x-x'|} f(x') \mathrm{d}x' &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x+x'} f(x') \mathrm{d}x' - \frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{x-x'} f(x') \mathrm{d}x' \\
&= -\frac{1}{2} \int_{c_1}^{x} \mathrm{e}^{-x+x'} f(x') \mathrm{d}x' + -\frac{1}{2} \int_{c_2}^{x} \mathrm{e}^{x-x'} f(x') \mathrm{d}x' + K_1 \mathrm{e}^{-x'} + K_2 \mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

Dabei sind $K_1$ und $K_2$ endlich, da $f(x) \in S$.

### 2.2.3 Mehrdimensionale Fouriertransformation

**Definition.** Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $f(\boldsymbol{x}) \in S$, wenn $f$ beliebig hohe partielle Ableitungen besitzt und für $r = \sqrt{x_1^2 + x_2 2 + \ldots + x_n^2}$ sowie für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, $p_i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \to \infty} \left| r^k \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right| = 0$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-r^2} &\in S \\
x_1^2 \mathrm{e}^{-r^2} &\in S
\end{aligned}$$

Dagegen $\mathrm{e}^{-x_1^2} \notin S$, da es mit $x_1 = 0$ bei $r \to \infty$ nicht abfällt.

**Definition** (Mehrdimensionale Fouriertransformation)**.** Sei $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} f)(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^n x \\
(\mathcal{F}^{-1} f)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^n k
\end{aligned}$$

**Beispiel.** $n = 3$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^2/2} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-x_i^2/2}$$
$$(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k}) = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{e}^{-k_i^2/2} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{k}^2/2}$$

Bei allgemeinen $f(\boldsymbol{x})$ faktorisiert $(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k})$ nicht!

#### 2.2.3.1 Fouriertransformation einer radialsymmetrischen Funktion

Sei $n = 3$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $f(\boldsymbol{x}) = f(r)$. Denken wir uns $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ fest,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{kx} &= kr\cos\theta \\ \mathrm{d}^3x &= r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

wo $k = |\boldsymbol{k}|$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{k}) \overset{!}{=} (\mathcal{F}f)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta} r^2 f(r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty \mathrm{d}r \left[ \frac{1}{\mathrm{i}kr} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta} \right]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} r^2 f(r) \\ (\mathcal{F}f)(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty \mathrm{d}r f(r) r \sin kr \end{aligned} \tag{2.11}$$

Analog die Rücktransformation

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^\infty \mathrm{d}k f(k) k \sin kr \tag{2.12}$$

Wählen Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x_2 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 &= r\cos\theta \end{aligned}$$

mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$; weiters

$$\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

Wählen $x_1$, $x_2$, $x_3$-Achsen so, dass $\boldsymbol{k} \parallel x_3$-Achse

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem $k = |\boldsymbol{k}|$.

**Beispiel.**

$$
\begin{aligned}
f(r) &= \mathrm{e}^{-ar} \qquad a > 0 \\
\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\boldsymbol{k}|(\mathcal{F}f)(|\boldsymbol{k}|) &= \int_0^\infty \mathrm{d}r \sin|\boldsymbol{k}|r \mathrm{e}^{-ar} r = \operatorname{Im} \int_0^\infty \mathrm{d}r \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|)r} r \\
&= \operatorname{Im} \frac{1}{a-\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|} \int_0^\infty \mathrm{d}r \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|)r} r = \operatorname{Im} \frac{1}{(a-\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|)^2} \cdot \frac{(a+\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|)^2}{(a+\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|)^2} \\
&= \frac{2a|\boldsymbol{k}|}{(a^2+k^2)^2} \\
(\mathcal{F}f)(|\boldsymbol{k}|) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2a|\boldsymbol{k}|}{(a^2+k^2)^2}
\end{aligned}
$$

In der zweiten Zeile wurde dabei partiell integriert.


[1] Arfken, G.: *Mathematical Methods for Physicists*. Addison-Wesley, 1981.