Kapitel 1

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen und Randwertprobleme

Eine *Differentialgleichung* (DGL) ist eine Gleichung, in der die Variable x, die gesuchte Funktion $y(x)$ sowie deren Ableitungen vorkommen.

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* in einer Variable x und einer gesuchten Funktion $y(x)$ ist von der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Die höchste auftretende (n-te) Ableitung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

Beispiel (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)**.**

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

Einen bedeutenden Spezialfall stellt die *lineare gewöhnliche Differentialgleichung* dar: sie ist linear in $y, y', y'', \dots$

Beispiel (Lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung)**.**

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

mit Lösung (c_1, c_2 Konstanten)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{1.2}$$

Bemerkung (Notation)*.* Motiviert von der physikalischen Anwendung heißt die Variable oft t (*time*) und die gesuchte Funktion $x(t)$; die Ableitung nach t wird mit einem Punkt bezeichnet, $\dot{x}(t)$. In dieser Schreibweise lauten die obige DGL (1.1) und ihre Lösung (1.2)

$$\ddot{x} + x = 0$$
$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \cos t$$

Fragen, die im Zusammenhang mit DGL auftreten, sind insbesondere nach *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Gesamtheit* der Lösungen.

Ein *Anfangswertproblem* gibt Werte zu einer DGL ausschließlich an derselben Stelle vor,

$$y(x_0), y'(x_0), \ldots$$

bzw.

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \ldots$$

Ein Randwertproblem gibt dagegen Werte an verschiedenen Stellen vor, z. B. ($x_0 \neq x_1$)

$$y(x_0), y(x_1)$$

bzw.

$$x(t_0), x(t_1)$$

Beispiel (Randwertproblem)**.**

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass $y(x) = 0$ für alle x. Dieses Randwertproblem hat damit *keine nichttriviale* Lösung!

Wir ändern unsere Fragestellung und wollen jetzt wissen, zu welchen Werten $\lambda \in \mathbb{C}$ es Lösungen $y(x)$ gibt, die

$$y'' + \lambda y = 0$$

erfüllen, und wie alle diese λ_n und $y_n(x)$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) lauten. Ein Beispiel für eine solche Situation liefert die Quantenmechanik (QM): Für welche Energiewerte hat die Schrödingergleichung eines Elektrons im Wasserstoffatom Lösungen?

1.1 Wiederholung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Peano, Picard-Lindelöf; ohne Beweis))**.** *Sei*

$$y' = f(x, y)$$

Wenn f stetig im rechteckigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist, sowie in G die Lipschitzbedingung *erfüllt, so gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösung der DGL, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist, $y(x_0) = y_0$ erfüllt und stetig von (x_0, y_0) abhängt.*

Definition (Lipschitzbedingung)**.** Die Funktion f erfüllt im rechteckigen Gebiet G eine Lipschitzbedingung, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N \, |y_2 - y_1|$$

Bemerkung. Für uns genügt die schwächere Version für Existenz und Eindeutigkeit, dass f in einem rechteckigen Gebiet *stetig* sein und (bei festem x) eine *beschränkte partielle Ableitung nach y* haben soll, d. h.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < N$$

für $N > 0$ sein soll.

Beispiel.

$$y' = \sqrt{y}$$
$$y(0) = 1$$

Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes mit $y \geq a$, $a > 0$ erfüllt.

$$f(x,y) = \sqrt{y}$$

ist stetig,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ist beschränkt, da $a > 0$. Also existiert eine eindeutige Lösung (siehe später).

Speziell für

$$y' + f(x)y = g(x)$$

lautet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (EES):

Wenn $f(x)$, $g(x)$ auf abgeschlossenen Intervall stetig, dann gibt es eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0)$, $x_0 \in I$ erfüllt.

Schließlich für

$$y'' = f(x, y, y')$$

ist der EES wie folgt:

Wenn f stetig im zylindrischen Gebiet $G = I \times K_2$ (wo $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $K_2 \in \mathbb{R}^2$Kreisscheibe) ist, und partielle Ableitungen nach y, y' besitzt, so existiert eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = \eta_0$$
$$y'(x_0) = \eta_1$$

erfüllt.

1.1.1 Typ getrennte Variable

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f(x)}{g(y(x))} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ \int g(y)\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

anschließend nach $y(x)$ auflösen

1.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$$y_{\text{ges}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez}}(x)$$

y_{hom} ist allgemeine Lösung von $y' + f(x)y = 0$ und das ist ja Typ getrennte Variable

y_{spez} durch Variation der Konstanten

Beispiel.

$$\begin{aligned} y' + y &= 1 + x \\ y_{\text{hom}} &= k\mathrm{e}^{-x}, \quad k \in \mathbb{R} \\ y_{\text{spez}}(x) &= k(x)\mathrm{e}^{-x} \\ k'\mathrm{e}^{-x} - k\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x} &= 1 + x \\ k' &= (1 + x)\mathrm{e}^{x} \\ k &= \int (1 + x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + c \end{aligned}$$

wählen $c = 0$

$$y_{\text{ges}} = k\mathrm{e}^{-x} + x$$

1.1.3 Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Ansatz:

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 :\ y_{\text{hom}} = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda :\ y_{\text{hom}} = c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda x}$
- Wenn y_1, y_2 Lösung der homogenen linearen DGL, so ist selbst für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ $c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda x}$ Lösung

- Wenn $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$: gilt für $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$: $y_1^* = y_2$
  daher sind auch

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\
\operatorname{Im} y_1 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

  Lösungen mit

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha} \cos \beta x \\
\operatorname{Im} \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} &= \mathrm{e}^{\alpha} \sin \beta x
\end{aligned}$$

  können wir auch schreiben

$$y_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Zur Erinnerung:

2 Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind linear unabhängig (heißen Hauptsystem)

Wronski-Determinante verschwindet nicht $\forall x$

$$0 \neq W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Beispiel. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \,\forall x$$

1.1.4 Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}
y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \\
y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}} \\
y_{\text{spez}} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)
\end{aligned}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ kennen wir schon aus Abschnitt 1.1.3; y_{spez} bestimmen wir mittels Variation der Konstanten. Man kann durch Einsetzen in inhomogene DGL nicht beide c_1, c_2 festlegen, daher extra Bedingung notwendig.

Die spezielle Lösung ist frei wählbar!

Daher folgender Ansatz:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

rechnet man das durch, ergibt sich:

$$y_{\text{spez}}(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \mathrm{d}x$$

Beispiel. $y'' + y = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

$$\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

$$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_{\text{spez}} = -\cos x \int \sin x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \,\mathrm{d}x = 1$$

$$y_{\text{ges}} = k_1 \cos x + k_2 \sin x + 1$$

1.1.5 Allgemeine homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Es existieren 2 l.u. Lösungen, aber es gibt *kein* allgemeines Verfahren zu deren Bestimmung.

Manchmal ist eine Lösung $y_1(x)$ bekannt (z.B. durch Erraten), dann kann man dazu eine l.u. Lösung $y_2(x)$ bestimmen.

Betrachten zunächst W, leiten ab und setzen für y'' die DGL ein:

$$\begin{aligned}
W &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\
W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\
&= y_1(-f y_2' - g y_2) - y_2(f y_1' - g y_1) - f(y_1 y_2' - y_2 y_1') \\
&= -fW \\
\int \frac{\mathrm{d}W}{W} &= -\int f \mathrm{d}x \\
\ln W &= -\int f \mathrm{d}x \\
W &= \mathrm{e}^{-\int f \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Trick:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{W}{y_1^2} \mathrm{d}x \\
y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{W}{y_1^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beispiel.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0,\ |x| < 1$$

Durch Erraten: $y_1(x) = x$

Probe:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 1 \\
y_1'' &= 0 \\
-\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2}x &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} \\
W(x) &= \mathrm{e}^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x \int \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \dots \\
&= x(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}) \\
&= -1 + \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}
$$

1.1.6 Allgemeine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

Die homogene Lösung wird wie zuvor (Abschnitt 1.1.5) bestimmt, die spezielle mittels Variation der Konstanten

$$y_{\text{ges}} = k_1 y_1 + k_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 h}{W}\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 h}{W}\mathrm{d}x$$

1.1.7 Potenzreihenentwicklung

Wir betrachten

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

und suchen bei $x = x_0$ *näherungsweise* Lösungen

Definition.

1. $f(x)$, $g(x)$ können bei x_0 analytisch ins Komplexe fortgesetzt werden, x_0 heißt *reguläre Stelle.*
2. Gilt dies nur für $(x-x_0)f(x)$ und $(x-x_0)^2 g(x)$, heißt x_0 *reguläre Singularität*
3. Sonst heißt x_0 *singuläre Stelle*

Es gilt:

1. Ist x_0 reguläre Stelle, so führt $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ zu zwei l. u. Lösungen

2. Ist x_0 reguläre Singularität, so führt der *Frobeniusansatz* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\varrho+n}$, $a_0 \neq 0$ zu mindestens einer Lösung $y_1(x)$. Der *Index* ρ wird als Wurzel deiner parametrischen Gleichung erhalten. Wir bezeichnen diese beiden Wurzeln mit ρ_1, ρ_2.

   (a) Wenn $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, so liefern $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_1+n}$ und $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_2+n}$ zwei l. u. Lösungen.

   (b) Wenn $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ (also insbesondere $\rho_1 = \rho_2$), so liefert $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_1+n}$ eine Lösung, die zweite dazu l. u. Lösung wird mit der Wronskideterminante gefunden. Es erbit sich dabei

$$y_2(x) = cy_1(x)\ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_2+n}$$

Beispiel.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x(1-x)}y = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} & \dots & f(x) \\ \dfrac{1}{x(1-x)} & \dots & g(x) \end{array}$$

Es ist $x_0 = 0$ eine reguläre Singularität, weil

$$x\frac{1}{x} = 1$$
$$x^2\frac{1}{x(1-x)} = \frac{x}{1-x}$$

bei $x = 0$ analytisch fortsetzbar ist ($\frac{z}{1-z}$ hat keinen Pol bei $z_0 = 0$).

Ansatz:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\varrho+n}$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varrho+n)x^{\varrho+n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varrho+n)(\varrho+n-1)x^{\varrho+n-2}$$

am bestem in folgende Umformung einsetzen

$$x(1-x)y'' + (1-x)y' + y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n(\varrho+n)(\varrho+n-1)(x-x^2)x^{\varrho+n-2} + a_n(\varrho+n)(1-x)x^{\varrho+n-1} + a_n x^{\varrho+n}\right\} = 0$$

und sortieren nach Potenzen von x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x^{\varrho+n-1}(\varrho+n)(\varrho+n-1+1) + x^{\varrho+n}\left[-(\varrho+n)(\varrho+n-1) - (\varrho+n) + 1\right] \right\} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varrho+n)^2 x^{\varrho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[1-(\varrho+n)^2\right] x^{\varrho+n} = 0$$

Die niedrigsten Potenzen von x treten in den Summanden mit $n = 0$ auf, und zwar in der ersten Summe bei

$$x^{\varrho-1} : \ a_0\varrho^2$$

Nun ist lt. Vor. $a_0 \neq 0 \Rightarrow \varrho^2 = 0 \Rightarrow \varrho = 0$ (bei 2 Lösungen würden 2 Fälle unterschieden)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^2 x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-n^2)x^n = 0$$

Wieder Koeffizientenvergleich:

$$x^{-1} : \ a_0 \cdot 0 = 0$$

also keine Aussage, setzen mit dem nächsten fort

$$\begin{aligned}
x^0 &: & a_1 + a_0 &= 0 & \Rightarrow && a_1 &= -a_0 \\
x^1 &: & 4a_2 + a_1(1-1) &= 0 & \Rightarrow && a_2 &= 0 \\
x^2 &: & 9a_3 + a_2(1-4) &= 0 & \Rightarrow && a_3 &= 0
\end{aligned}$$

könnte man noch fortsetzen, durch Induktionsbeweis Regelmäßigkeit zeigen, ...

$$y(x) = a_0(1-x)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - x$$

Potenzreihe hat für 2. Lösung nichts gebracht, aber wir können sie mit der Wronskideterminante bestimmen

Bemerkung. Warum muss bei Frobeniusansatz Bedingung für reguläre Singularität erfüllt sein?
Wäre z.B. $g(x) = \frac{c_{-3}}{x^3} + \sum_{k=-2}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_{-3} \neq 0$, dann folgt nach Einsetzen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\varrho+n}$$

mittels Koeffizientenvergleich, dass $c_{-3} = 0 \Rightarrow$ Widerspruch!!

Bemerkung. Einsetzen der Frobeniusreihenlösung $y_1(x)$ in die Wronskideterminantenformel führt allgemein zu $y_2(x) = u(x)\ln x + v(x)$, wo $u(x)$, $v(x)$ Frobeniusreihen sind

1.2 Randwertprobleme bei gewöhnlichen DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Randbedingung:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

$$a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},\ a \neq b$$

Spezialfälle:

- $\beta_1 = \beta_2 = 0$ Dirichlet'sches Randwertproblem
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Neumann'sches Randwertproblem
- $h(x) = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ homogenes Randwertproblem
- sonst inhomogenes Randwertproblem

Bei homogenen RWP gibt es immer die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$; wir nennen ein homogenes RWP *lösbar*, wenn es ein $y(x) \not\equiv 0$ gibt.

Im Gegensatz zum AWP ist inhomogenes RWP i. A. nicht immer lösbar

Beispiel.

$$y'' + y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

$$y = \mathrm{e}^{\mu x}$$

$$\mu^2 + 1 = 0$$
$$\mu = \pm \mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ y(0) = 0 &= c_1 \\ \Rightarrow y &= c_2 \sin x \\ y(1) = 0 &= c_2 \underbrace{\sin 1}_{\neq 0} \\ c_2 &= 0 \\ y(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Beispiel.

$$y'' + y = 1$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Mittels Variation der Konstanten ($W = 1,\ f = 1$):

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 \\ y(0) = 0 &= c_1 + 1 \\ \Rightarrow y &= -\cos x + c_2 \sin x + 1 \\ y(\pi) = 0 &= -(-1) + c_2 \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen führt also auf den Widerspruch $0 = 2$; es gibt daher keine Lösung.

Beispiel.

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y(0) = y(1) = 0 \end{gathered}$$

$$y = \mathrm{e}^{\mu x}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 + \lambda &= 0 \\ \mu &= \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \\ y(0) = 0 &= c_1 \\ \Rightarrow y &= c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \\ y(1) = 0 &= c_2 \sin \sqrt{\lambda} \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda} &= n\pi \\ c_2 &\neq 0 \\ \lambda_n &= (n\pi)^2 \\ y_n &= c \sin n\pi x \end{aligned}$$

mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Die unbestimmte Konstante kann durch eine Normierungsbedingung festgelegt werden , z.B.:

$$\begin{gathered} \int_0^1 y_n^2(x) \mathrm{d}x = 1 \\ c^2 \int_0^1 \sin^2 n\pi x \mathrm{d}x = \frac{c^2}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 y \mathrm{d}y = \frac{c^2}{2} \\ c = \sqrt{2} \end{gathered}$$

wobei $y = n\pi x$ benutzt wurde.

1.2.1 Sturm-Liouville'sches Randwertproblem

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

p, q, r reelle stetige Funktionen und überdies ist $p(x)$, $r(x)$ positiv $\forall x$

Ges.: Eigenwerte λ_n und zugehörige Eigenfunktionen $y_n(x) \neq 0$

Beispiel.

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = r(x) = 1,\ q(x) = 0,\ a = b = 1$$

Es gilt, ohne Beweis, erläutert am Beispiel:

Satz.

- *Eigenwerte sind reell, streng monoton steigend,* $\lambda_n \to \infty$
  Bsp: $\lambda_n = (n\pi)^2,\ n = 1, 2, 3, \dots$

- *Eigenfunktionen sind bis auf konstanten Faktor eindeutig*
  Bsp.: $y_n = c \sin n\pi x$

- *EF* y_n *hat in* (a, b) $n - 1$ *Nullstellen*
  Bsp.: $y_3 = c \sin 3\pi x$

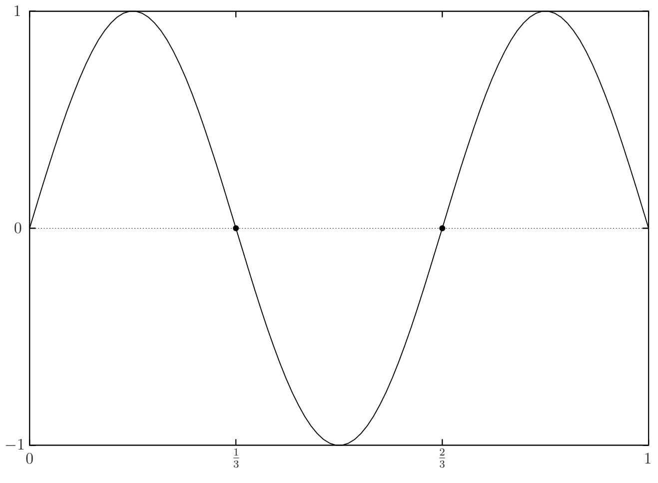

Abbildung 1.1: $y(x) = \sin 3\pi x$

- *EF bilden bilden (bei geeigneter Normierung) ein* Orthonormalsystem *mit Belegfunktion* $r(x)$

$$\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

  Bsp.: $c = \sqrt{2},\ y_n = \sqrt{2} \sin m\pi x$

Sei $n \neq m$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{2}\sin n\pi x\sqrt{2}\sin m\pi x \mathrm{d}x &= \int_0^1 \cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\pi x\Big|_0^1 = 0
\end{aligned}
$$

$n = m$:

$$
\int_0^1 2\sin^2 n\pi x\, dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 2n\pi x)dx = 1
$$

- *EF y_n bilden* vollständiges *Orthonormalsystem. Das bedeutet insbesondere: Ist f stückweise stetig differenzierbar in (a,b) und erfüllt die Randbedingungen, so konvergiert*

$$
f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} c_n y_n(x)
$$

mit

$$
c_n := \int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx
$$

gleichmäßig gegen f (siehe auch Abb. 1.2)

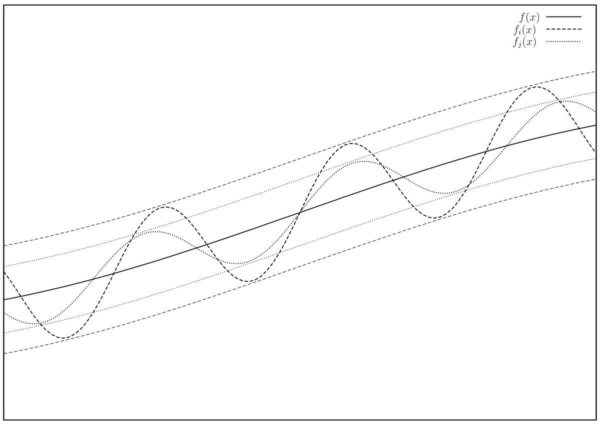

Abbildung 1.2: Gleichmäßige Konvergenz von $f_N(x)$ gegen $f(x)$ $(i < j)$

- *Ist f Lebesgue-quadratintegrierbar (siehe* **??***) in (a,b), so konvergiert f_N im quadratischen Mittel gegen f*

$$
\lim_{N\to\infty}\int_a^b r(x)|f(x)-f_N(x)|^2 dx = 0
$$

Beispiel: Fourierentwicklung $f(0) = f(1) = 0$ stetig differenzierbar

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} c_n\sqrt{2}\sin n\pi x \\
c_n &= \int_0^1 f(x)\sqrt{2}\sin n\pi x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

1.2.2 Verallgemeinerung der Randbedingungen

Entweder Stetigkeit, oder Endlichkeit, oder höchstens Anwachsen wie Polynom bei a oder b.
Auch ein unendlich großes Intervall (z.B. $a = 0,\ b = \infty$) ist zugelassen.

1.2.3 Wichtige Beispiele

Legendre-Polynome $P_n(x)$

$$((1-x^2)y')' + \lambda y = 0, \quad x \in [-1,1]$$

$$\text{Randbedingung: } y(\pm 1) < \infty$$

ausschreiben und ausdifferenzieren:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Ohne Beweis oder Herleitung:

$$\Rightarrow \lambda = n(n+1),\ n = 0,1,2,3,\dots$$

$$y_n \dots \text{Legendre-Polynome}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \end{aligned}$$

DGL kommt bei Beschreibung von Membranen vor. DGL muss gelöst werden und Lösung muss Randbedingung genügen

Bemerkung. DGL hat an sich zwei l. u. Lösungen, durch Randbedingung bleibt jedoch nur eine übrig.

Besselfunktion J_n

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy,\ x \in [0,1]$$

$$n = 0,1,2,3,\dots \ \text{ fix vorgegeben}$$

$$y(1) = 0,\ y(0) < \infty$$

mittels $\xi = \sqrt{\lambda}x$ und $y(x) := J(\xi)$ transformieren wir (siehe Übungen)

$$\xi^2 J''(\xi) + \xi J'(\xi) + (\xi^2 - n^2)J(\xi) = 0$$

$$J(\sqrt{\lambda}) = 0,\ J(0) < \infty$$

$$\Rightarrow \lambda_{n,m} = k_{n,m}^2, \quad k_{n,m} \dots \text{Nullstellen von } J$$

J_n Besselfunktion, $y_n(x) = J_n(k_{n,m}x)$

Besselfunktionen hängen mit Kugelfunktionen zusammen

Bemerkung. Die zweite l. u. Lösung erfüllt die Randbedingung $y(0) < \infty$ nicht.

Hermite-Polynome H_n

$$(\mathrm{e}^{-x^2}y')' + \lambda\mathrm{e}^{-x^2}y = 0,\ y \in \mathbb{R}$$

y darf in ∞ höchstens wie endliche Potenz ansteigen (d.h. y ist Polynom)

Wir schreiben die Gleichung um:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = 2n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_n \ldots \text{Hermitepolynome } H_n$$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

Bemerkung. Die zweite l. u. Lösung der DGL steigt nicht-polynomisch an.

Laguerre-Polynome L_n

$$(x\mathrm{e}^{-x}y')' + \lambda\mathrm{e}^{-x}y = 0,\ x \in [0, \infty]$$

$$y(0) < \infty$$

y darf in ∞ höchstens wie endliche Potenz ansteigen (d.h. y ist Polynom)

Wir schreiben wieder die Gleichung um:

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = n$$

$$y_n \ldots \mathrm{Laguerre-Polynome\,L_n}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_1 &= 1 - x \\ L_2 &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Die Laguerre-Polynome kommen in der Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms vor.

Bemerkung. Auch hier ist die zweite Lösung der DGL kein Polynom.

[1] Arfken, G.: *Mathematical Methods for Physicists*. Addison-Wesley, 1981.