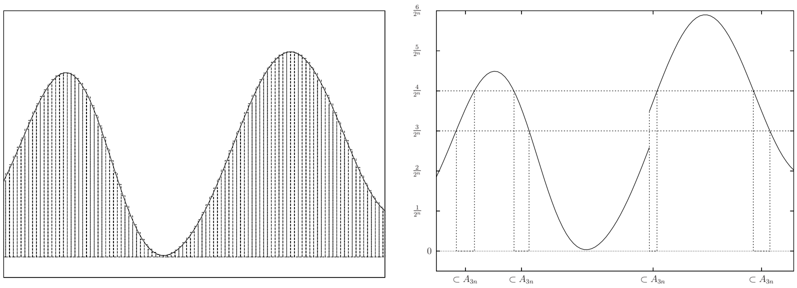
Kapitel 6

Lineare Operatoren im Hilbertraum

Funktionenräume sind unendlich-dimensionale Vektorräume. Was heißt selbstadjungiert?

6.1 Grundtatsachen der Lebesgue'schen Integrationstheorie

1. Approximation des Integrals durch Rechtecksummen, wo (anstatt wie beim Riemann-Integral die x-Achse) die y-Achse unterteilt wird.



(a) Riemann-Integral (b) Lebesgue-Integral

Abbildung 6.1: Unterschiedliche Arten von Integration (schematisch)

2. Suchen Verallgemeinerung des Begriffs der Länge μ von allgemeinen Punktmengen. Zunächst:

$$\mu(I) = b - a$$
$$\mu(\text{Punkt}) = 0$$

wo I offenenes oder abgeschlossenes Intervall.

Definition (σ-Algebra)**.** Gegeben sei eine Menge X. $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra* wenn mit $A \in \mathcal{A}$ auch $A^C := X\backslash A \in \mathcal{A}$ ist, sowie mit $A_{i=1,2,3,\ldots} \in \mathcal{A}$ auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ist.

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
X &= \{1,2,3,4,5\} \\
A_1 &= \{1,3,5\} \\
A_2 &= \{2,4\} \\
\mathcal{A} &= \{\emptyset, X, A_1, A_2\}
\end{aligned}
$$

Hier ist $\mathcal{A}$ σ-Algebra.

Folgerung:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ $(\emptyset = X^C)$
2. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ $(X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i))$

Definition (Borelmenge)**.** *Borelmengen* sind die Elemente der kleinsten σ-Algebra $\mathcal{B}$, die alle offenen Intervalle enthält.

Folgerung: auch jedes abgeschlossene Intervall ist Borelmenge, da $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$

Definition (Nullmengen)**.** Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung der Nullmenge N mit offenen Intervallen I_n, sodass $N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$.

Beispiel.

- Punkt ist Nullmenge.
- Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist Nullmenge.

Definition (Lebesgue-Maß)**.** *Lebesgue'sches Maß* μ einer Borel'schen Menge $A \in \mathcal{B}$: $\mu(A) := \inf\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)\right)$, wo Infimum über alle Überdeckungen von A mit offenen Intervallen zu bilden ist.

Eigenschaften von μ Ohne Beweis, anschaulich klar:

- $0 \leq \mu(A) \qquad A \in \mathcal{B}$
- Wenn $A_i \in \mathcal{B}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset \, \forall n \neq m$ gilt:

$$
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)
$$

Beispiel.

$$
\mu(\emptyset) = 0
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
X &= X \cup \emptyset \\
\emptyset &= X \cap \emptyset \\
\mu(X) &= \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset) \\
\mu(\emptyset) &= 0
\end{aligned}
$$

□

- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

- Wenn $A \subset B$: $\mu(A) \leq \mu(B)$

- $\mu(\text{Nullmenge}) = 0$ (Infimum ist 0)

Beispiel.

$$\mu([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 1$$

Beweis.

$$[0,1] = ([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})$$
$$\mu([0,1]) = 1 = \mu\left([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\right) + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q})$$

und, da $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ (die Menge der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$) als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst eine Nullmenge ist:

$$\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$$
$$\mu\left([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\right) = 1$$

□

Definition (Messbarkeit)**.** Die reellwertige Funktion f heißt *messbar*, wenn $\{x | y_1 \leq f(x) \leq y_2)\} \, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ Borelmenge ist.

Definition (Lebesgue Integral)**.** Für die positive, reellwertige, messbare Funktion f definieren wir

$$A_{kn} = \left\{ x \mid \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$$
$$A_{\infty} = \{x \mid f(x) = \infty\}$$

wo $k, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu(A_{kn})$$

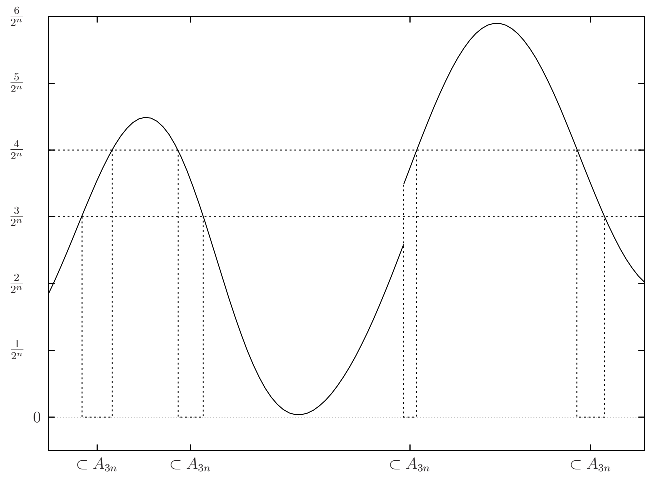


Abbildung 6.2: Lebesgue-Integration

Bemerkung. Wenn $f(x)$ nicht positiv ist, gilt

$$\int f \,\mathrm{d}x = \int f_+ \,\mathrm{d}x - \int f_- \,\mathrm{d}x$$
$$f_+ = \max(f, 0)$$
$$f_- = \max(-f, 0)$$

Definition. Wenn A_∞ eine Nullmenge ist, d.h. $\mu(A_\infty) = 0$:

$$\infty \cdot \mu(A_\infty) := 0$$

Definition.

$$\int_A f(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) C_A(x) \,\mathrm{d}x$$

wo $C_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Definition. f heißt *integrierbar auf A,* wenn

$$\int_A f \,\mathrm{d}x \quad < \quad \infty$$

Definition. Eine komplexwertige Funktion f heißt *quadratintegrabel* auf A, wenn

$$\int_A f^*(x) f(x) \,\mathrm{d}x < \infty$$

Satz. *(ohne Beweis)*

Sei f auf kompaktem Intervall messbar, beschränkt, reellwertig. Ist f Riemann-integrabel, so ist f auch Lebesgue-integrabel, und die Integrale stimmen überein.

Satz. *(ohne Beweis)*

Sei f messbar. Wenn das uneigentliche Riemann-Integral von $|f|$ existiert, so existiert auch das Lebesgue'sche, und stimmt überein.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht: nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist auch Riemann-integrierbar!

Beispiel.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

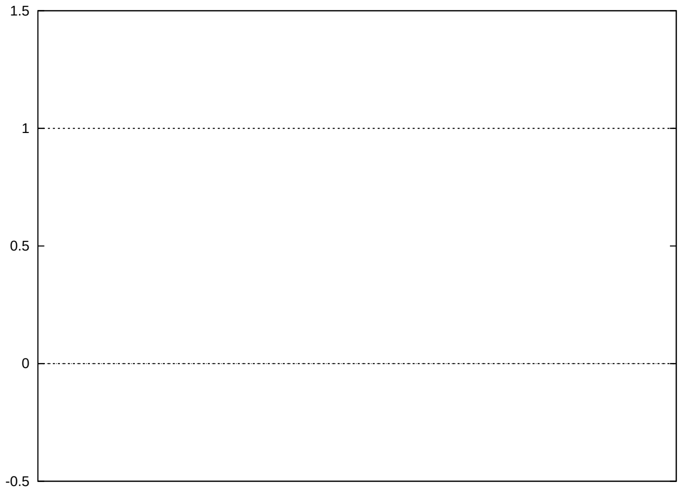


Abbildung 6.3: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \end{cases}$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1 \cdot \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Dabei ist $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$, da $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ eine abzählbare Vereinigung von Punkten darstellt. Die Funktion $f(x)$ ist also Lebesgue-integrabel (aber nicht Riemann-integrabel!)

Es folgen zwei wichtige Sätze:

Satz (Monotone Konvergenz)**.** *Seien $f_n(x) \geq 0$ messbar, konvergiere $f_n(x) \to f(x)\, \forall x$ punktweise, seien $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)\, \forall x, \forall n$, und sei $\int f_n(x)\mathrm{d}x < c\, \forall n$: Dann gilt*

- $\int |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \int |f(x) - f_n(x)|\, \mathrm{d}x = 0$

Satz (Dominierte Konvergenz)**.** *Konvergiere $f_n(x) \to f(x)\, \forall x$ punktweise und seien $|f_n(x)| < G(x)\, \forall n$ wo $\int |G(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$. Dann gilt*

- $\int |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \int |f(x) - f_n(x)|\, \mathrm{d}x = 0$

Beispiel. Sei $f \geq 0$ messbar. Aus $\int f(x)\mathrm{d}x = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle x bis auf eine Nullmenge. Wir sagen: $f(x) = 0$ *fast überall.*

Beweis. Zu zeigen für $N = \{x | f(x) > 0\}$ bzw. für $X_N = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N \end{cases}$ gilt:

$$\int X_N(x)\mathrm{d}x = \mu(N) = 0$$

Sei $A_n = \left\{x | f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, $X_n = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} X_n &\geq 0 \\ \lim_{n\to\infty} X_n(x) &= X_N(x) \\ X_{n+1}(x) &\geq X_n(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\int X_n(x)\mathrm{d}x = 0 < 1 \,\forall n$$

Letzteres folgt aus

$$f(x) \geq \frac{1}{n} X_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in A_n \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{n} \\ 0 & x \notin A_n \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < \frac{1}{n} \end{cases}$$

und wegen

$$0 = \int f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{n} \int X_n(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen laut Voraussetzung und das letzte Ungleichheitszeichen laut Definition von X_n; damit

$$\int X_n \mathrm{d}x = 0$$

und schließlich, unter Benutzung des Satzes über monotone Konvergenz 6.1

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int \mathrm{d}x \, |X_N(x) - X_n(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \int \mathrm{d}x \, |X_N(x)| &= 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. (ohne Beweis)

Die zwei Konvergenzsätze bleiben richtig, wenn statt „Konvergenz $f_n(x) \to f(x) \forall x$“ „Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ *fast überall*“ gesetzt wird.

6.2 Hilberträume[1]

Motivation: In Quantenmechanik verwendet man, dass jede beliebige Wellenfunktion als Überlagerung von Energieeigenfunktionen dargestellt werden kann. Mathematische Grundlage ist die Theorie der Hilberträume.

[1] ...Himbeerträume

Definition. Ein Hilbertraum

1. ist Vektorraum
2. hat inneres Produkt
3. ist vollständig

Vektorraum

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{H} \qquad & f + q \in \mathcal{H} \\ \exists \mathbf{0} \qquad & f + \mathbf{0} = f \\ \forall f \, \exists (-f) \qquad & f + (-f) = \mathbf{0} \\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad & \alpha f \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Außerdem gelten Assoziativ- und Distributivgesetze.

Inneres Produkt

$$\exists \langle f \mid g \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \langle g \mid f \rangle &= \langle f \mid g \rangle^* \\ \langle f \mid g + h \rangle &= \langle f \mid g \rangle + \langle f \mid h \rangle \\ \langle f \mid \alpha g \rangle &= \alpha \langle f \mid g \rangle \end{aligned}$$

Definition (Norm)**.** $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$
Es soll gelten: $\|f\| = 0 \Rightarrow f = \mathbf{0}$

Bemerkung. In jedem VR mit Skalarprodukt gilt

1. $|\langle f \mid g \rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$ *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*
2. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *Dreiecksungleichung*

Vollständigkeit Wenn $f_n \in \mathcal{H}$ eine *Cauchy-Folge* ist, d. h. wenn $\forall \epsilon > 0 \, \exists N$, sodass $\forall m, n \geq N$ $\|f_m - f_n\| \leq \epsilon$; dann $\exists f \in \mathcal{H}$, wir schreiben $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ in dem Sinne, dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$

Beispiele für Hilberträume:

Beispiel ($\mathbb{C}^n$)**.** $x^i, y^i \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x &= \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{C}^n \\ y &= \left(y^1, \ldots, y^n\right) \in \mathbb{C}^n \\ \langle x \mid y \rangle &:= \sum_{i=1}^{n} x^{i*} y^i \end{aligned}$$

Beispiel ($\ell^2(\mathbb{N})$)**.** Elemente x sind Folgen komplexer Zahlen $x^i \in \mathbb{C}$, die „quadratsummierbar" sind:

$$\begin{aligned} x =& \{x^i | i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} \left|x^i\right|^2 < \infty\} \\ x + y :=& \{x^i + y^i\} \\ \alpha x :=& \{\alpha x^i\} \\ \langle x \,|\, y \rangle :=& \sum_{i=1}^{\infty} x^{i*} y^i \end{aligned}$$

($\ell^2(\mathbb{N})$ besprechen wir hier nicht)

Beispiel ($\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$)**.** Der $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ist die Äquivalenzklasse von Lebesgue-quadratintegrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f | \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

wo

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \\ \langle f \,|\, g \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} f^*(x) g(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Wir identifizieren $f \sim g$, wenn $f(x) = g(x)$ fast überall.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ein vollständiger Funktionenraum ist, müssten wir zunächst die Sätze zur monotonen und dominierten Konvergenz geeignet verallgemeinern. Um einen möglichst einfachen Einblick in die Methoden der funktionalanalytischen Beweisführung zu gewinnen, beschränken wir uns aber hier auf den Vollständigkeitsbeweis von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; Dies ist die Klasse von Äquivalenzklasse von Lebesgue-absolutintegrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \left\{ f | \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

wo

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

und $f \sim g$ wenn $f(x) = g(x)$ f. ü.

Definition (1-Norm)**.**

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f| \,\mathrm{d}x$$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ist linearer, normierter, vollständiger Funktionsraum (so genannter *Banachraum*). Er ist kein Hilbertraum, da kein Skalarprodukt definiert ist.

Vollständigkeit des $\mathcal{L}^1$*.* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sind jene Funktionen, die $\left\{ f \mid \int_{\mathbb{R}} |f| \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$

Sei $f_n \in \mathcal{L}^1$ eine Cauchy-Folge, wir können Teilfolge auswählen (wir bezeichnen sie der Einfachheit halber genauso), sodass

$$\|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$$

Es seien

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$$

(Wir lassen für $g(x)$ auch eventuell Wert ∞ zu)

Da $g_{m+1}(x) \geq g_m(x)$

$$\begin{aligned}\|g_m\|_1 = \int |g_m| \,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{m} \int |f_n - f_{n+1}| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m} \|f_n - f_{n+1}\|_1 \\ \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \,\forall m\end{aligned}$$

Es gilt der Satz über monotone Konvergenz, daher $g \in L^1$, also $g(x) < \infty$ f. ü.

Damit konvergiert

$$f_m(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$$

punktweise f. ü. gegen ein f! Weiters

$$|f_m(x)| \leq \left| f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \right| \leq |f_1| + g \in \mathcal{L}^1 \forall m$$

Mit dem Satz für dominierte Konvergenz

- $f \in \mathcal{L}^1$
- $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$

zusammen Vollständigkeit.

□

Beispiel ($\mathcal{L}^2([a,b])$).

$$\mathcal{L}^2([a,b]) = \left\{ f | \int_a^b |f|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$
$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f^* g \,\mathrm{d}x$$
$$f \sim g \text{ wenn } f(x) = g(x) \text{ f. ü. in } [a,b]$$

6.3 Basissysteme im Hilbertraum

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ heißt *dicht*, falls es für alle $f \in \mathcal{H}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathcal{M}$ mit $\|f - m\| < \varepsilon$ gibt.

Definition. $\mathcal{H}$ heißt *separabel*, wenn es eine *abzählbare dichte* Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ gibt.

Satz. *(ohne Beweis)*

$$\mathbb{C}^n,\ \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ \mathcal{L}^2([a,b]) \text{ sind separabel}$$

Definition. $f,\, g \in \mathcal{H}$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle f \mid g \rangle = 0$

Definition. $\{e_k\}$, $e_k \in \mathcal{H},\ k = 1, 2, 3, \ldots$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), wenn $\langle e_k \mid e_j \rangle = \delta_{kj}$

Definition. Für $f \in \mathcal{H}$, $\{e_k\}$ ein ONS, heißen $\hat{f}_k := \langle e_k \mid f \rangle \in \mathbb{C}$ *Entwicklungskoeffizienten* von f

Satz (Bessel'sche Ungleichung)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2 \leq \|f\|^2 \tag{6.1}$$

Beweis.

$$0 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \,\middle|\, f - \sum_{j=1}^{n} e_j \hat{f}_j \right\rangle$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_k \mid e_j \rangle \hat{f}_k^* \hat{f}_j - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k^* \langle e_k \mid f \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle f \mid e_j \rangle \hat{f}_j$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} \hat{f}_k^* \hat{f}_j - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k^* \hat{f}_k - \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j^* \hat{f}_j = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_k\right|^2 \forall n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2 \leq \|f\|^2$$

□

So wie im endlich dimensionalen Vektorraum oft mit den Koordinaten eines Vektors in Bezug auf eine geeignete Basis gerechnet wird, verwendet man im Hilbertraum oft eine analoge Entwicklung nach einer *Orthonormalbasis.*

Definition (Orthonormalbasis)**.** $\{e_k\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ heißt *Orthonormalbasis* (ONB, oder "vollständiges" Orthonormalsystem) eines separablen Hilbertraumes $\mathcal{H}$, wenn $\{e_k\}$ ONS ist und aus

$$\langle f | e_k \rangle = 0 \; \forall k = 1, 2, 3, \ldots$$

folgt, dass $f = \mathbf{0}$ ist.

Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und die $\{e_k\}$ eine ONB; sei $f \in \mathcal{H}$. Dann gilt:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\| = 0$ *(im $\mathcal{L}^2$ Konvergenz im quadratischen Mittel)*

2. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2$ *Parseval'sche Gleichung*

Beweis. 1. Sei $f_n = \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k$

Wählen $n > m$, dann gilt

$$\|f_n - f_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \left| \hat{f}_k \right|^2 \to 0$$

für geeignet große n, m (wegen Bessel'scher Ungleichung (6.1) ist $\hat{f}_k$ Nullfolge). Also ist $\{f_n\}$ Cauchy-Folge und konvergiert gegen ein $\bar{f} \in \mathcal{H}$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \bar{f} - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\| = 0$$

Nun gilt aber

(auf Grund der Stetigkeit des Skalarprodukts - siehe Übungen - kann lim nach außen gezogen werden)

$$\langle f - \bar{f} | e_k \rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f - \sum_{j=1}^{n} e_j \hat{f}_j \,\middle|\, e_k \right\rangle = \underbrace{\langle f | e_k \rangle}_{\hat{f}_k^*} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} e_j \hat{f}_j \,\middle|\, e_k \right\rangle}_{\hat{f}_k^*} = \hat{f}_k^* - \hat{f}_k^* = 0$$

also

$$\begin{aligned} \langle f - \bar{f} | e_k \rangle &= 0 \\ f(x) - \bar{f}(x) &= 0 \end{aligned}$$

da $\{e_k\}$ ONB ist. (Für z.B. $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$ bedeutet dies $f(x) = \bar{f}(x)$ f. ü.)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} e_j \hat{f}_j \right\| = 0$$

□

Beweis. 2. Bei der Herleitung der Bessel'schen Ungleichung (6.1) hatten wir

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| \hat{f}_k \right|^2$$

gefunden; nun wenden wir $\lim_{n\to\infty}$ an:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} e_k \hat{f}_k \right\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_k \right|^2 \\ 0 &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_k \right|^2 \end{aligned}$$

□

Beispiel (Fourierreihenentwicklung)**.** Sei $f \in \mathcal{L}^2\left([0, 2\pi]\right)$, eine ONB ist (ohne Beweis)

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

somit also

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} f(x)\, dx$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} e_j \hat{f}_j \right\| = 0$$

Konvergenz der Fourierreihe für ein $f \in \mathcal{L}^2$ ist im Sinne des *quadratischen Mittels* gegeben.

6.4 Lineare Operatoren in endlich-dimensionalen Räumen

Sei V unitärer Raum (Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt), sei $\dim V = n$

Definition. $A : V \to V$ heißt linearer Operator, falls:

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \alpha A(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ A(x+y) &= A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

Wenn Basis $\{b_i\}$ des Vektorraums gegeben ist, lässt sich dem Operator A eine $m \times m$ Matrix M_A zuordnen

$$\begin{aligned} Ab_j &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k \\ (M_A)_{ik} &= a_{ik} \end{aligned}$$

wir haben $x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$ (ab sofort verwenden wir die Summenkonvention!) sowie für

$$\begin{aligned} y &= Ax = Ax_j b_j = x_j A b_j = x_j a_{kj} b_k = x_k a_{jk} b_j \\ y_j &= a_{jk} x_k \end{aligned}$$

aufgrund der Linearität und durch Umbenennen der Indizes.

Definition (adjungierter Operator)**.** Sei $x, y \in V$, A linearer Operator

$$\langle y | Ax \rangle = \langle A^\dagger y | x \rangle$$

Es gilt

$$M_{A^\dagger} = (M_A)^\dagger$$

$\dagger \dots$ adjungiert (transponiert und komplex konjugiert)

$$(M_{A^\dagger})_{ik} = a_{ki}^*$$

A heißt *selbstadjungiert* wenn $A = A^\dagger \Leftrightarrow M$ ist *hermitisch* $(M_A = (M_A)^\dagger)$

6.4.1 Eigenwerte, Eigenvektoren

Definition. λ heißt Eigenwert (EW) und $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ heißt Eigenvektor (EV) von A, wenn

$$Ax = \lambda x$$

bzw.:

$$(A - \lambda \mathbf{1})\, x = \mathbf{0}$$

Für die Matrix-Darstellung folgt:

$$(M_A - \lambda \mathbf{1}_{n\times n})\, x = \mathbf{0}$$

Damit $x \neq \mathbf{0}$ Lösung des homogenen GLS ist, muss gelten:

$$\det (M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

Das ist eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung in λ

Satz. *Sei*

$$A \quad = \quad A^\dagger$$

Dann gilt:

- *EW sind reell*
- *EV zu verschiedenen EW sind orthogonal*

EW reell.

$$\begin{aligned} \langle x|Ax\rangle &= \langle x|\lambda x\rangle = \lambda \langle x|x\rangle \\ &= \langle Ax|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \lambda^* \langle x|x\rangle \end{aligned}$$

$$(\lambda - \lambda^*) \langle x|x\rangle = 0$$

und, da $\langle x|x\rangle \neq 0$

$$\lambda = \lambda^*$$

□

EV orthogonal. Sei $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned} \langle x|Ay\rangle &= \langle x|\mu y\rangle = \mu \langle x|y\rangle \\ &= \langle Ax|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \lambda \langle x|y\rangle \end{aligned}$$

$$(\lambda - \mu) \langle x|y\rangle = 0$$

und da laut Voraussetzung $\lambda - \mu \neq 0$

$$\langle x|y\rangle = 0$$

$\square$

Beispiel (Projektor)**.**

$$P^\dagger = P \qquad\qquad P^2 = P$$

EW eines Projektors P sind $0, 1$

$$Px = \lambda x$$
$$Px = P^2 x = P\lambda x = \lambda P x = \lambda^2 x$$

$$\left(\lambda - \lambda^2\right) x = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad\qquad \lambda_2 = 1$$

Satz (Spektralsatz)**.** *Sei A ein selbstadjungierter Operator in einem n-dimensionalen unitären Raum V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren $e_{i=1,\ldots,n}$ von A und*

$$M_A = S^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

wo S jene unitäre Matrix mit $S^\dagger S = \mathbf{1}$ ist, die aus den orthonormalen EV e_i gebildet wird:

$$S = (e_1, \ldots, e_n)$$

Bemerkung. Wir bezeichnen mit λ_α die *unterschiedlichen* EW, die n_α-fach entartet sein können (d. h. n_α-fache Nullstelle von $\det(M_A - \lambda\mathbf{1}) = 0$ sind). Für selbstadjungierte A gibt es zu jedem λ_α genau n_α linear unabhängige Eigenvektoren. Man muss noch das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, um n_α *orthonormale* EV $e^{(\alpha)}_{i=1,\ldots,n_\alpha}$ zu erhalten.

Korollar (Spektraldarstellung)**.**

$$M_A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k e_k^\dagger$$

(e_k ist in Matrixschreibweise eine 1-spaltige, $e_k^\dagger$ eine 1-zeilige Matrix)

oder insbesondere

$$M_A = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha P_\alpha$$

wo

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} e_i^{(\alpha)} e_i^{(\alpha)\dagger}$$

Projektoren auf $V_\alpha = \{x \in V \mid Ax = \lambda_\alpha x\}$, $\dim V_\alpha = n_\alpha$ *sind, für die weiters gilt:*

$$\sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha = \mathbf{1}$$
$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha$$

Bemerkung. Das Korollar folgt aus

$$(M_A)_{lm} = \sum_{k,j=1}^{n} (S)_{lk} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}_{kj} \left(S^\dagger\right)_{jm}$$
$$(S)_{lk} = (e_1, \ldots, e_n)_{lk} = (e_k)_l$$
$$\left(S^\dagger\right)_{jm} = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ \vdots \\ e_n^\dagger \end{pmatrix}_{jm} = \left(e_j^*\right)_m$$
$$(M_A)_{lm} = \sum_{k,j=1}^{n} (e_k)_l \, \lambda_k \delta_{kj} \left(e_j^*\right)_m$$
$$M_A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k e_k^\dagger$$

Beispiel. *Normale* (nicht aber selbstadjungierte) Matrix M_A:

$$M_A M_A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$M_A^\dagger M_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq (M_A)^\dagger$$
$$\det(M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 11 - \lambda & 8 \\ 8 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i} \qquad\qquad \lambda_2 == 1 - 2\mathrm{i}$$

$\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 2 \\ -2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ein EV ist z. B.: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$

Mit $\lambda_2 = 1 - 2\mathrm{i}$ folgt $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und damit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} (1 \ -\mathrm{i}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} (1 \ \mathrm{i}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

Spektraldarstellung:

$$M_A = (1 + 2\mathrm{i})P_1 - (1 - 2\mathrm{i})P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel.

$$M_A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = (M_A)^\dagger$$

$$\det (M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 11 - \lambda & 8 \\ 8 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda - 75 = 0$$

$$\lambda_1 = 15 \qquad \lambda_2 = -5$$

$\lambda_1 = 15$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ein EV ist z. B.: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $\lambda_2 = -5$ folgt $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und schließlich

$$P_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1, 2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spektraldarstellung:

$$M_A = 15P_1 - 5P_2 = 15 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt durch Einsetzen: es stimmt!

6.5 Lineare beschränkte Operatoren im Hilbertraum

Definition. Ein Operator $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \to W_A \subseteq \mathcal{H}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $C > 0$ gibt, sodass

$$\|Af\| \leq C \|f\| \ \forall f \in \mathcal{D}_A$$

Die kleinste der Beschränktheits-Zahlen C, heißt *Norm* $\|A\|$ des Operators A

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathcal{D}_A} \frac{\|Af\|}{\|f\|}$$

Damit gilt

$$\|Af\| \leq \|A\| \|f\|$$

Beispiel. Multiplikationsoperator x in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$(Af)(x) = xf(x)$$

Wir wählen $\mathcal{D}_A = \left\{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mid xf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\right\} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; damit ist x in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ nicht beschränkt.

Wir wählen nun $\phi_a(x)$

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 1 & a - \frac{1}{2} \leq x \leq a + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\|\phi_a\|^2 = \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = a + \frac{1}{2} - (a - \frac{1}{2}) = 1$$

also

$$\phi_a \in \mathcal{D}_A \ \forall a$$

Aber

$$\|x\phi_a\|^2 = \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} = a^2\left(1 + \frac{1}{12a^2}\right) \to \infty$$

Beispiel. Multiplikationsoperator x in $\mathcal{L}^2([0,1])$ ist beschränkt (vgl. Übungen).

Beispiel (Differentiationsoperator $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in $\mathcal{L}^2[(0,a)]$)**.**

$$(Af)(x) = f'(x)$$

Wählen

$$\mathcal{D}_A = \left\{ f \in \mathcal{L}^2\left([0,1]\right) \mid f' \in \mathcal{L}^2\left([0,a]\right) \right\}$$
$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x/a} \in \mathcal{D}_A \quad \forall n$$

Es ist $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ nicht beschränkt:

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n \right\| = \frac{2\pi}{a} n \to \infty$$

Definition. Ein linearer, auf ganz $\mathcal{H}$ definierter Operator heißt *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge aus $\mathcal{H}$ in eine kompakte Menge abbildet.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ heißt *beschränkt*, wenn $\exists m \in \mathcal{M}$, $c \in \mathbb{R}^+$, sodass $\|m - f\| \leq c \; \forall f \in \mathcal{M}$

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ heißt *kompakt*, wenn jede unendliche Teilmenge aus $\mathcal{M}$ eine Cauchy-Folge enthält.

Bemerkung. Ein kompakter Operator ist beschränkt.

Definition. Ein linearer, beschränkter, auf ganz $\mathcal{H}$ definierter, beschränkter Operator A heißt *selbstadjungiert*, wenn für alle $f, g \in \mathcal{H}$

$$\langle g \mid Af \rangle = \langle Ag \mid f \rangle$$

Satz (Spektralsatz für lineare, kompakte, auf ganz $\mathcal{H}$ definierte, selbstadjungierte Operatoren)**.** *Es gibt höchstens abzählbar viele, rein reelle EW λ, mit*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \to 0$$

Alle jene λ_i, wo $\lambda_i \neq 0$, sind höchstens endlichfach entartet, $\lambda = 0$ kann eventuell Häufungspunkt sein.

Es gilt, ähnlich wie in endlich-dimensionalen Vektorräumen, für alle $f \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{k \to \infty} \left\| Af - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha P_\alpha f \right\| = 0$$

Satz (Spektralsatz für lineare, beschränkte, auf ganz $\mathcal{H}$ definierte, selbstadjungierte Operatoren)**.** *Benötigen Verallgemeinerung der Summe $\sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha$ zu Integral $\int \lambda \mathrm{d}E_\lambda$*

$$P_\alpha \mathrel{\hat{=}} \mathrm{d}E_\alpha \approx E_\alpha - E_{\alpha-1}$$
$$\sum_{\beta \leq \alpha} P_\beta \mathrel{\hat{=}} E_\alpha$$

wobei E_α Projektor auf den Eigenraum aller $\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha$ ist.

Satz. *Jedem linearen, auf ganz $\mathcal{H}$ definierten, beschränkten, selbstadjungierten Operator kann eine Spektralschar E_λ zugeordnet werden.*

wo

$$\begin{aligned} E_\alpha &\ \textit{ist Projektor} \\ E_\lambda &= E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda,\ \lambda \le \mu \\ E_{\lambda \neq 0} &= E_\lambda \\ E_\lambda &= \begin{cases} 0 & \lambda < M_1 \\ 1 & \lambda > M_2 \end{cases} \end{aligned}$$

da M beschränkt ist $M_1 \le \lambda \le M_2$, sodass

$$\left\| Af - \int \lambda \mathrm{d}E_\lambda f \right\| = 0$$

Verallgemeinerung des Begriffs Eigenwert

Definition (Spektrum $\sigma(A)$)**.**

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda \quad \text{hat kein beschränktes Inverses}\}$$

Bemerkung. Spektrum umfasst die Eigenwerte, denn $\nexists (A-\lambda)^{-1}$. Zu $\sigma(A)$ gehört noch mehr, z. B. jene λ, wo $\exists (A-\lambda)^{-1}$, aber nicht beschränkt ist.

Definition (Resolventenmenge $\rho(A)$)**.**

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | (A-\lambda)^{-1} \exists \quad \text{und ist beschränkt}\right\}$$

6.6 Lineare unbeschränkte Operatoren

Typischerweise A nicht auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, sondern auf $\mathcal{D_A} \subset \mathcal{H}$ dicht!

Definition (Erweiterung eines linearen Operators)**.** B heißt *Erweiterung* von A ($B \supseteq A$) wenn $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$, $B|_{\mathcal{D_A}} = A$

Beispiel ($\mathcal{L}^2([0,1])$)**.**

$$A = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\mathcal{D_A}} \qquad \mathcal{D_A} = \left\{f \in \mathcal{L}^2\left([0,1]\right) | f' \in \mathcal{L}^2\left([0,1]\right), f(0) = f(1) = 0\right\} \tag{6.2}$$

$$B = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\mathcal{D_B}} \qquad \mathcal{D_B} = \left\{f \in \mathcal{L}^2\left([0,1]\right) | f' \in \mathcal{L}^2\left([0,1]\right), f(0) = f(1)\right\} \tag{6.3}$$

und damit

$$B \supseteq A$$

Definition (Adjungierter Operator $A^\dagger$)**.** Einem linearen, dicht auf $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$ def. Operator A kann man den adjungierten Operator $A^\dagger$ auf $\mathcal{D}_{A^\dagger} \subseteq \mathcal{H}$ zuordnen, mittels

$$\left\langle A^\dagger g \,\middle|\, f \right\rangle = \langle g \,|\, Af \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}_A,\ g \in \mathcal{D}_{A^\dagger}$$

Bemerkung.

- In $\mathcal{D}_{A^\dagger}$ sollen *alle möglichen* g enthalten sein.
- $\mathcal{D}_{A^\dagger}$ muss nicht dicht in $\mathcal{H}$ sein.

Definition (Symmetrischer Operator)**.** Ein linearer, dicht auf $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$ definierter Operator A heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle g \,|\, Af \rangle = \langle Ag \,|\, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_A$$

Bemerkung. Für symmetrische Operatoren gilt offensichtlich $\mathcal{D}_{A^\dagger} \supseteq \mathcal{D}_A$, also $A^\dagger \supseteq A$

Definition (Selbstadjungierter Operator)**.** Ein linearer, dicht auf $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$ definierter Operator A heißt *selbstadjungiert*, wenn er symmetrisch ist und wenn $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^\dagger}$ gilt.

Bemerkung. Oft können symmetrische Operatoren durch Vergrößerung von $\mathcal{D}_A$ (dies bewirkt Verkleinerung von $\mathcal{D}_{A^\dagger}$) zu selbstadjungierten Operatoren erweitert werden.

Beispiel. Vorige zwei Differentialoperatoren (6.2, 6.3) auf $\mathcal{L}^2([0,1])$.
A ist symmetrisch, nicht selbstadjungiert:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^* \mathrm{i} f' \mathrm{d}x &= \mathrm{i} g^* f\big|_0^1 + \int_0^1 (\mathrm{i}g')^* f \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i} g^*(1) \underbrace{f(1)}_{=0} - \mathrm{i} g^*(0) \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^1 (\mathrm{i}g')^* f \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{A^\dagger} = \left\{ g \in \mathcal{L}^2([0,1]) \,|\, g' \in \mathcal{L}^2([0,1]) \right\} \supseteq \mathcal{D}_A$$

B ist selbstadjungiert

$$\int_0^1 g^* \mathrm{i} f' \mathrm{d}x = \mathrm{i}\left(g^*(1) - g^*(0)\right) f(0) + \int_0^1 (\mathrm{i}g')^* f \mathrm{d}x$$

Der linke Term verschwindet nur, wenn auch $g(0) = g(1) \Rightarrow \mathcal{D}_{B^\dagger} = \mathcal{D}_B$